

104285 בוחן מד"ר א 20 באוקטובר 2014
 3 שעות, 7 שאלות, 14 נקודות לכל אחת, 3 נקודות על השתתפות
 רשמו תשובות סופיות ודרך פתרון (בקצרה).
 תשובה סופית בלבד לא תזכה בנקודות!
 חומר פתוח. טעות חישוב מחשבון או מחשב זאת טעות שלכם.

ת.ז. בהצלחה! קוד גרסה: 212AB

PROBLEM	POINTS (MAX 14)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
TO ADD	3
GRADE FOR THE TEST (MAX 101)	
MIDTERM	
HW	
GRADE FOR THE COURSE	

1.

א. יהי $x = x(t)$ פתרון של המשוואה

$$x' = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

המקיים את התנאי $x(10) = x_0$ ומוגדר בקטע מקסימלי אפשרי (t^-, t^+) .
תנו תנאי הכרחי ומספיק על x_0 כך ש-

א. $t^+ = \infty$

ב. $\lim_{t \rightarrow t^+} x(t) \neq \pm\infty$

ג. בגרף של $x(t)$ יש נקודת פיתול.

תשובות:

א. $t^+ = \infty$ אם ורק אם

ב. $\lim_{t \rightarrow t^+} x(t) \neq \pm\infty$ אם ורק אם

ג. בגרף של $x(t)$ יש נקודת פיתול אם ורק אם

דרך פתרון (בקצרה):

2. יהי $x = x(t)$ פתרון של המשוואה

$$x' = \frac{(x+1)(t+2)}{t^6+1}$$

המקיים את התנאי $x(0) = -2$ ומוגדר בקטע מקסימלי אפשרי (t^-, t^+) .
יהי

$$\lim_{t \rightarrow t^+} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t^-} x(t) = b$$

הקיפו היגדים נכונים:

	t^+ הוא מספר סופי	$t^+ = \infty$
$-\infty < t^- < -2$	$t^- \geq -2$	$t^- = -\infty$
$-\infty < a < -1$	$a = -\infty$	$a = -1$
$-\infty < b < -1$	$b = -\infty$	$b = -1$

הוכחות (בקצרה):

3. יהי פתרון של המשוואה $x'' = F(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6+1}}$ המקיים את התנאים

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

ומוגדר לכל $t \in \mathbb{R}$

א. הוכיחו כי לכל $v_0 \geq 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$

ב. הוכיחו כי לכל $v_0 < 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$

ג. יהי $v_0 < 0$ ו- x^* מספר כך ש- $\int_{x^*}^0 F(x) dx = \frac{v_0^2}{2}$ מצאן $t_1 > 0$ כך ש- $x(t_1) = 0, x'(t_1) > 0$ מותר להשאיר אינטגרלים בתשובה סופית.

א. הוכחה

. ב. הוכחה

ג. $t_1 =$

דרך פתרון (בקצרה):

4. מצאו את אוסף כל הפתרונות הממשיים של המשוואה

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t)) = e^{-t}(\sin t + \cos(2t)), \quad P(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2.$$

בתוצאות הסופיות צריכים להופיע רק מספרים ממשיים.

תשובה:

דרך פתרון (בקצרה):

5. נתון:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מצאו דוגמא לבסיס של מרחב כל הפתרונות של המערכת

$$x' = Ax, \quad x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

תשובה:

דרך פתרון (בקצרה):

6. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ו- $x' = Ax$ פתרון של המערכת $x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

המקיים את התנאי $x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ תנו תנאי הכרחי ומספיק על a, b, c
כך ש- $x(t) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^3$ כאשר $t \rightarrow \infty$.

תנאי הכרחי ומספיק על a, b, c

דרך פתרון (בקצרה):

7. מצאו פתרון של המשוואה

$$x' = (2x - 3t + 1)^2 + 1$$

המקיים את התנאי $x(1) = 0$ אין אינטגרלים בתשובה סופית.

רמז: שינוי $x(t) \rightarrow y(t) = 2x(t) - 3t + 1$

$$x(t) =$$

דרך פתרון (בקצרה):