נושאים נבחרים באנליזה מתמטית 3 - 106936 - הרצאה

מרצה: מיכאיל ז'יטומירסקי, סיכומים ותרגום סימולטני: אלון לסל

17 בינואר 2012

אין הטכניון או מי מטעמו, כולל מרצה הקורס, אחראים לתוכנו של מסמך זה. המסמך נכתב במהלך השיעורים ועלול להכיל חוסרים וטעויות. השימוש בו הוא על אחריות המשתמש בלבד.

תוכן עניינים

1 הגדרות וסימונים

נביט במערכת של שתי משוואות דיפרנציאליות רגילות. נוכל לכתוב אותה בצורה

$$\dot{x} = Ax + h.o.t. \tag{1}$$

כאשר x וקטור המשתנים, $A \in M_{2\times 2}(R)$, ו-$h.o.t.$ הם איברים מסדר גבוה. נוכל לכתוב את המערכת בצורה

$$\dot{x} = F(x)$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

נזכיר:

הגדרה 1.1 נקודה (x_1^0, x_2^0) היא **נקודת שווי-משקל** או **נקודה סינגולרית** אם $f_1(x_1^0, x_2^0) =$ $f_2(x_1^0, x_2^0) = 0$.

הנש"מ של מערכת מתאימות לפתרונות קבועים של המערכת, בהינתן שתנאי משפט הקיום והיחידות מתקיימים. אנחנו נניח ש-$f_1, f_2 \in C^\infty$. A הנ"ל היא **מטריצת יעקובי** של המערכת:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} |_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0}$$

כאשר הקואורדינטות במערכת 1 הן הקואורדינטות $y_i = x_i - x_i^0$. במצב זה, אם

$$f_1(x_1, x_2) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h.o.t.$$

$$f_2(x_1,x_2)=a_{21}y_1+a_{22}y_2+h.o.t.$$

אז $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

2 ביפורקצית אנדרונוב-הופף

2.1 ביפורקציות

ביפורקציה מתרחשת כאשר ישנו שינוי באופי נקודות שווי-המשקל (נש"מ) של מערכת דינמית כתלות בפרמטר של המערכת. נביט במערכת

$$\dot{x}=F\left(\lambda;x\right)$$

כאשר λ הוא פרמטר ממשי - ; מסמל הפרדה בין הפרמטרים והמשתנים, במקרה זה, λ ו-x בהתאמה. נניח שעבור $\lambda=\lambda^*$, למערכת יש נש"מ.

שאלה: האם עבור ערכים קרובים של λ, עדיין תהיה נקודת שווי-משקל?

זה לא נכון באופן כללי! ניקח

$$\dot{x}_1=x_1^2+\lambda^2$$

$$\dot{x}_2=x_2$$

למערכת זו יש נש"מ רק עבור $\lambda=0$. אבל עבור

$$\dot{x}_1=x_1+\lambda^2$$

$$\dot{x}_2=x_2$$

תמיד תהיה נש"מ. המשפט הבא אומר לנו מה ההבדל המהותי בין מערכות אלו - הוא נובע ממשפט הפונקציות הסתומות.

משפט 2.1 אם (x_1^*, x_2^*) היא נש"מ עבור $\lambda = \lambda^*$, אז קיימת סביבה של λ^* כך שלכל λ בסביבה זו, ל-$F(\lambda; x)$ יש נש"מ $x_1(\lambda), x_2(\lambda)$, כך שאלו פונקציות C^∞ או אנליטיות (בהתאם לפונקציות $(f_1(x_1, x_2, \lambda), f_2(x_1, x_2, \lambda)$, ו-$x_1(\lambda), x_2(\lambda) \to x_1^*, x_2^*$ כאשר $\lambda \to \lambda^*$, בהינתן ש-$\det A \neq 0$ ב-$\lambda = \lambda^*$, (x_1^*, x_2^*). בנוסף, קיימת סביבה כלשהי של הנש"מ שבה היא הנש"מ היחידה - כלומר, מתקיימת יחידות לוקלית.

2.2 תנאים לביפורקצית הופף

2.2.1 הקדמה

ביפורקצית הופף מתרחשת כאשר הע"עים של היעקוביאן θ_1, θ_2 מדומים לחלוטין: $\pm i\alpha, \alpha \neq 0$.
בפרט, $|A| \neq 0$. לפי המשפט האחרון, אם λ קרוב ל-λ^*, יש לנו נש"מ $(x_1(\lambda), x_2(\lambda))$ הקרובה ל-(x_1^*, x_2^*). מרציפות, הערכים העצמיים של $A(\lambda)$ לא יהיו ממשיים. כיוון שהמטריצה עדיין ממשית, הם יהיו צמודים.

אנו מקבלים מהדרישות הנ"ל מערכת של 3 משוואות:[1]

$$\begin{cases} f_1\left(x_1^*, x_2^*; \lambda\right) = 0 \\ f_2\left(x_1^*, x_2^*; \lambda\right) = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*; \lambda\right) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*; \lambda\right) = 0 \end{cases}$$

המשוואה האחרונה היא פשוט $Tr(A)$ בנש"מ (x_1^*, x_2^*). אבל כדי למנוע מצב שבו הערכים העצמיים הם ממשיים נגדיים או אפס, נדרוש גם

$$\left|A\left(x_1^*, x_2^*; \lambda^*\right)\right| > 0$$

[1] הרצאה 4 - 2.11.2011

כלומר, יש לנו שלוש משוואות בשלושה נעלמים ועוד תנאי פתוח (open condition). מצב שבו יש יותר משוואות מנעלמים - במקרה שלנו, 3 משוואות ו-2 נעלמים - נקרא **סינגולריות**. מצבים כאלה נוצרים כאשר יש לנו משפחות בעלות מספר פרמטרים, ועבור ערך מסוים של הפרמטרים מתקבלת סינגולריות. למשל, נביט במשפחת הפרבולות

$$f(x) = x^2 + \lambda$$

למערכת $f(0) = 0, f'(0) = 0$ יש פתרון רק עבור $\lambda = 0$. לכן זהו פתרון סינגולרי.

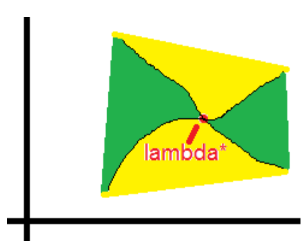
תנאי נוסף הדרוש עבור ביפורקצית הופף הוא שעבור שינוי "קטן" כלשהו של $\lambda = \lambda^*$, אנו רוצים לקבל ערך חיובי / שלילי כשאנחנו מגדילים את λ וערך שלילי / חיובי כשמקטינים את λ. לכן אנחנו נדרוש ש-

$$\frac{\partial Tr(A)}{\partial \lambda}(\lambda^*) > 0$$

או באופן שקול

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(\lambda), x_2(\lambda); \lambda) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(\lambda), x_2(\lambda); \lambda)\right] \neq 0$$

תמונות הפאזה שאנו מתארים נכונות בסביבה כלשהי U של הנקודה $(x_1^*, x_2^*; \lambda^*)$. האם U תלויה ב-λ? א-פריורי, ייתכן ש-$U(\lambda)$ הופכת לנקודה אחת. מסתבר שזה אכן המצב, ואנו נראה זאת בהמשך. ניתן לצייר זאת באופן הבא: אם הקוים השחורים יסמנו את גודל הסביבה שבה תמונת הפאזה נכונה, האזורים הצהובים מתארים את האזורים בהן מתחרשת ביפורקצית הופף:



אנו נראה בהמשך שביפורקצית הופף תלויה בטופולוגיה של תמונת הפאזה של השדה הוקטורי.

משפט 2.2 תמונות הפאזה האפשריות הן

1. מרכז (מסלולים מחזוריים סביב הראשית).
2. מוקד יציב חלש (אוסילציות שדועכות לראשית בקצב פולינומיאלי).
3. מוקד לא-יציב חלש (אוסילציות שמתרחקות מהראשית בקצב פולינומיאלי).

המקרה של מרכז מתרחש כשאין איברים מסדר גבוה - אבל ישנן אינסוף אפשרויות אחרות. הבעיה של תיאור האפשרויות האלה, כמו גם האפשרויות לשאר המקרים, היא בעית המוקד-מרכז (Center Focus Problem). **התשובה**: האיברים מסדר גבוה מגבוה מגדירים סדרה $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. האיברים בסדרה נקראים **מספרי מוקד** (focus numbers). מתקבל מרכז $\Longleftrightarrow$ כל מספרי המוקד שווים לאפס. אם קיים $a_i \neq 0$, יציבות תלויה בסימן של הראשון ששונה מאפס.

2.2.2 שיטת הניתוח המתמטי

על-ידי הזזה, נוכל להניח תמיד ש-$(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$. המערכת שלנו היא

$$\dot{x} = Ax + h.o.t.,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

והערכים העצמיים של A הם $\theta_1 = i\alpha, \theta_2 = -i\alpha, \alpha \neq 0$. לכן היציבות תלויה בגורמים הלא-לינאריים.

משפט 2.3 נניח ש-$h.o.t.$ אנליטית. תמונת הפאזה היא מרכז $\Longleftrightarrow$ מספרי המוקד $f_i = 0$ לכל $i = 1, 2, ...$. אחרת, מתקבל מוקד לא-יציב אם המספר הראשון השונה מאפס חיובי ומוקד יציב אם הוא שלילי.[2]

[2] הרצאה 5 - 6.11.2011

נכתוב

$$h.o.t.=\underbrace{\underbrace{\underbrace{(2)+(3)}_{f_1}+(4)+(5)}_{f_2}+(6)+(7)}_{f_3}+...$$

כאשר המספר בסוגריים הוא המעלה של הפולינום ב-x_1,x_2. את מספר המוקד f_i נקבע לפי הגורמים הלא-לינאריים ממעלה עד $2i+1$. נעסוק ראשית במקרה בו $h.o.t.$ הוא פולינום (וקטורי) ממעלה d. מספר המקדמים הוא בכל מקרה סופי, $l=l(d)$, ונסמן את המקדמים ב-$\alpha_1,...,\alpha_l$.

$$f_i=F_i\left(\alpha_1,...,\alpha_l\right)$$

ה-F_i במקרה זה יהיו פולינומים. לכן נקבל מרכז אם ורק אם $\alpha_1,...,\alpha_l$ מאפסים כל F_i.

משפט 2.4 משפט הבסיס של הילברט: כל אידאל בחוג הפולינומים במספר משתנים נוצר סופית.

באופן שקול, כל מערכת של משוואות פולינומיאליות מהצורה $F_i\left(\alpha_1,...,\alpha_l\right)=0$ שקולה למערכת סופית של משוואות כאלה. לכן קיים $s=s(d)$ כך שקיים במערכת מרכז $\Longleftrightarrow$ s מספרי המוקד הראשונים מתאפסים.

2.3 מרכז לינארי[3]

דוגמא למערכת לינארית עם מרכז:

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_1$$

[3] הרצאה 6 - 9.11.2011

נגזור

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2+x_2^2\right)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=0$$

לכן הרדיוס קבוע בזמן והמסלולים הם אכן מעגלים.

כיצד נבנה את כל המערכות הללו? נכתוב

$$\dot{x}=Ax$$

נבצע התמרת קואורדינטות לינארית $x=Ty$, כאשר $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ו-$\det T\neq 0$. נגזור לפי הזמן:

$$(Ty)'=ATy\Rightarrow y'=\left(T^{-1}AT\right)y$$

אם $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, x_1^2+x_2^2=const$, אז

$$(t_{11}y_1+t_{12}y_2)^2+(t_{21}y_1+t_{12}y_2)^2=const$$

אלו אליפסות, ולכן גם במערכת החדשה נקבל מרכז. כל מערכת לינארית שבה יש מרכז מתקבלת בתוצאה מהתמרה לינארית כזאת.

2.4 מרכז לא-לינארי

נתחיל מהמערכת הלינארית של הסעיף הקודם:

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_1$$

כעת נבצע החלפת משתנים לא-לינארית:

$$y_1 = x_1 - x_2^2$$

$$y_2 = x_2$$

זו העתקה חלקה וקיימת לה העתקה הופכית חלקה:

$$x_1 = y_1 + y_2^2$$

$$x_2 = y_2$$

נחשב את הנגזרות:

$$\dot{y}_1 + 2y_2\dot{y}_2 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - y_2^2$$

באופן שקול

$$\dot{y}_1 = y_2 - 2y_2\left(-y_1 - y_2^2\right) = y_2 + 2y_1y_2 + 2y_2^3$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - y_2^2$$

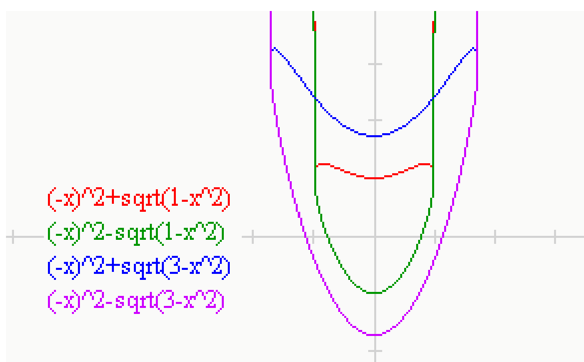
כיוון שההתמרה היא דיפאומורפיזם, עדיין נקבל מסלולים סגורים סביב הראשית - זהו מרכז לא-לינארי.

$$x_1^2 + x_2^2 = C$$

$$\Rightarrow (y_1 + y_2^2)^2 + y_2^2 = C$$

$$y_1^2 + 2y_2^2 \cdot y_1 + y_2^4 + y_2^2 - C = 0$$

$$y_1 = \frac{-2y_2^2 \pm \sqrt{4y_2^4 - 4y_2^4 - 4y_2^2 + 4C}}{2} = -y_2^2 \pm \sqrt{C - y_2^2}$$



2.5 דיפאומורפיזמים לוקליים

אנו נבחן כעת **דיפאומורפיזמים לוקליים**: העתקה המהווה דיפאומורפיזם עבור סביבה U כלשהי של $0 \in R^n$ כך ש-$\phi : U \to W$. נסמן זאת ב-

$$\phi\left(R^n, 0\right) \to \phi\left(R^n, 0\right)$$

למשל, עבור R, $x \mapsto \sin x$ הוא דיפאומורפיזם לוקלי אבל לא גלובלי - הוא לא חח"ע על כל הישר. דוגמאות נוספות:

$$x \mapsto \cos x - 1 + x$$

$$x \mapsto x + x^2$$

$$x \mapsto x + x^3 - 2x^5 + x^8$$

המשפט הבא נובע ממשפט הפונקציות הסתומות:

משפט 2.5 תהי $\phi : R^n \to R^n$ העתקה C^∞ המקיימת $\phi(0) = 0$. אז ϕ היא דיפאומורפיזם $\iff$ היעקוביאן בראשית שונה מאפס.

מסקנה 2.6 כל דיפאומורפיזם לוקאלי של R הוא מהצורה $x \mapsto \lambda x + h.o.t., \lambda \neq 0$.

מסקנה 2.7 כל דיפאומורפיזם לוקאלי של R^n הוא מהצורה $x \mapsto Tx + h.o.t., |T| \neq 0$.

2.5.1 שקילות מקומית של שדות וקטוריים

הגדרה 2.8 שדה וקטורי V_1 **שקול מקומית** בנקודה $v \in V_1$ לשדה וקטורי V_2 אם קיים דיפאומורפיזם לוקאלי $V_2 \to V_1$ על סביבה של v.

מספר שאלות:

1. אנו רוצים לבצע רדוקציה משדה וקטורי V, המקיים $V(0) = 0$ לצורה נורמלית "פשוטה". כיצד ניתן לעשות זאת?
2. יהי $V : \dot{x} = Ax + h.o.t.$. האם יש תנאי על A המבטיח ש-$V \sim \dot{x} = Ax$ ללא קשר ל-$h.o.t.$? במקרה כזה נאמר ש-V **ניתן ללינאריזציה**.

2.5.2 יחסים רזונטיביים[4]

טענה 2.9 אם לא קיימים יחסים רזונטיביים, כלומר, יחס מהצורה

$$\lambda_i = \sum_j \alpha_j \lambda_j$$

כאשר α_j שלמים אי-שליליים שסכומם גדול מ-2 ו-λ_i הע"עים של A, אז בקטגוריית C^∞, השדה הוקטורי ניתן ללינאריזציה.

נסמן $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in Z^n$ ו-$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. נסמן גם $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. אז ניתן לכתוב את $h.o.t.$ בצורה

$$h.o.t. = \begin{pmatrix} \sum_{|\alpha|=2} a_{1,\alpha}^2 x^\alpha \\ ... \\ \sum_{|\alpha|=2} a_{n,\alpha}^2 x^\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{|\alpha|=3} a_{1,\alpha}^3 x^\alpha \\ ... \\ \sum_{|\alpha|=3} a_{n,\alpha}^3 x^\alpha \end{pmatrix} + ...$$

הגדרה 2.10 נאמר ש**ניתן להרוג** את הגורם x^α במרכיב ה-k של שדה וקטורי אם השדה הוקטורי שקול לשדה ללא גורם זה: $a_{k,\alpha} = 0$.

באילו תנאים על A ניתן להרוג את כל הגורמים ממעלה 2? מתי ניתן להרוג את חלקם? נכתוב

$$\dot{x} = Ax + f^{(2)} + terms\ of\ degree \geq 3$$

כאשר $f^{(2)}$ מתאר את הגורמים ממעלה 2. אנו ננסה כעת להרוג את הגורמים הללו בעזרת התמרת קואורדינטות לוקלית:

$$x = y + \phi^{(2)}(y)$$

[4] הרצאה 7 - 13.11.2011

כאשר $\phi^{(2)}$ היא פונקציה וקטורית שרכיביה הם פולינומים ממעלה 2. אז

$$\dot{x} = \dot{y} + \underbrace{\left(\phi^{(2)}(y)\right)^{'}}_{Jacobian} \cdot \dot{y} =$$

$$A\left(y + \phi^{(2)}(y)\right) + f^{(2)}\left(y + \phi^{(2)}(y)\right) + (terms\ of\ degree \geq 3)\,|_{x=y+\phi^{(2)}(y)}$$

$$\left[I + \left(\phi^{(2)}(y)\right)^{'}\right] \cdot \dot{y} = Ay + A\phi^{(2)}(y) + f^{(2)}(y) + (degree \geq 3)$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \left[I + \left(\phi^{(2)}(y)\right)^{'}\right]^{-1}\left[Ay + A\phi^{(2)}(y) + f^{(2)}(y) + (degree \geq 3)\right]$$

כזכור,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... \quad |x| < 1$$

דבר זה נכון גם עבור מטריצות, במובן הבא:

$$(I+B)^{-1} = I - B + B^2 - B^3 + ... \quad \|B\| < 1$$

מטריצת יעקובי $\left(\phi^{(2)}(y)\right)^{'}$ מכילה איברים מסדר ראשון, ולכן עבור y קטן מספיק, הנורמה שלה תהיה קטנה מ-1. לכן

$$\dot{y} = \left[I - \left(\phi^{(2)}(y)\right)^{'} + \left(\phi^{(2)}(y)\right)^{'2} - ...\right]\left[Ay + A\phi^{(2)}(y) + f^{(2)}(y) + (degree \geq 3)\right]$$

האיברים ממעלה 2 יתקבלו מההמכפלות[5]

$$I \cdot Ay + I \cdot A\phi^{(2)}(y) + I \cdot f^{(2)}(y) - \phi^{(2)}(y)' Ay =$$

[5] בין האיברים ממעלה 3 - למשל, $\phi^{(2)}(x,y)\,\left(f^{(2)}(x,y)\right)'$.

$$Ay + A\phi^{(2)}(y) + f^{(2)}(y) - \phi^{(2)}(y)'Ay$$

כלומר,

$$f^{(2)}(x) \to f^{(2)}(y) + A\phi^{(2)}(y) - \left(\phi^{(2)}(y)\right)' Ay$$

ואנו רוצים לבחור ϕ כך ש-

$$f^{(2)}(y) + A\phi^{(2)}(y) - \left(\phi^{(2)}(y)\right)' Ay = 0$$

יהי V_2 מרחב הפונקציות הוקטוריות הריבועיות, $\dim V_2 = \frac{n^2(n+1)}{2}$. קיימת העתקה

$$L : V_2 \to V_2$$

$$\phi^{(2)} \mapsto A\phi^{(2)} - \left(\phi^{(2)}\right)' Ay$$

אנו יכולים להרוג כל גורם ממעלה 2 אם L אינה סינגולרית. אם A לכסינה, אז

$$L\left(\phi^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \phi_1^{(2)} \\ ... \\ \lambda_n \phi_n^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y_n} \\ & \\ \frac{\partial \phi_n^{(2)}}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_n^{(2)}}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ ... \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \phi_1^{(2)} - \lambda_1 y_1 \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y_1} - ... - \lambda_n y_n \frac{\partial \phi_n^{(2)}}{\partial y_n} \\ \\ \lambda_n \phi_n^{(2)} - \lambda_1 y_1 \frac{\partial \phi_n^{(2)}}{\partial y_1} - ... - \lambda_n y_n \frac{\partial \phi_n^{(2)}}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

בסיס ל-V_2:

$$l_{k,\alpha} = y^\alpha \ in \ kth \ coordinate : \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ y^\alpha \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

ו-

$$L(l_{k,\alpha}) = l_{k,\alpha} \left(\lambda_1 - \alpha_1\lambda_1 - ... - \alpha_n\lambda_n\right)|_{|\alpha|=2}$$

2.6 שדות וקטוריים המילטוניים[6]

2.6.1 משפט החלוקה

משפט 2.11 משפט החלוקה: נניח ש-$f(x) \in C^\infty$ ו-$f(0) = 0$. אז קיימת $g(x) \in C^\infty$ כך ש-$f(x) = xg(x)$.

באופן כללי, אם $f(x_1, ..., x_n) \in C^\infty$ ו-$f(0, ..., x_n) \equiv 0$, אז ניתן לכתוב $f(x_1, ..., x_n) = x_1 g(x_1, ..., x_n)$ כאשר $g \in C^\infty$. כיצד נוכל לחלק באופן כללי $x_1 - x_1*$: $f(x_1, ..., x_n)$?

נכתוב

$$\tilde{f}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) - f(x_1^*, ..., x_n)$$

$$\tilde{f}(x_1, ..., x_n) \equiv 0$$

[6]הרצאה 7 - 16.11.2011

מהנ"ל נובע שניתן להציג $\tilde{f}$ בצורה הבאה:

$$\tilde{f}(x_1,...,x_n)=(x_1-x_1^*)g(x_1,...,x_n) \quad g\in C^\infty$$

למה? נגדיר

$$\hat{f}(x_1,...,x_n)=\tilde{f}(x_1+x_1^*,...,x_n)$$

אז $\hat{f}(0,...,x_n)\equiv 0$ ולכן

$$\hat{f}(x_1,...,x_n)=x_1\hat{g}(x_1,...,x_n)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x_1,...,x_n)=\hat{f}(x_1-x_1^*,x_2,...,x_n)=(x_1-x_1^*)\hat{g}(x_1-x_1^*,...,x_n)$$

ונגדיר $g(x_1,...,x_n)\triangleq\hat{g}(x_1-x_1^*,...,x_n)$. מכאן נובע

משפט 2.12 אם $f(x_1,...,x_n)\in C^\infty$, $x_1^*\in\mathbb{R}$ אפס של f, אז קיימות $g,h\in C^\infty$ כך ש-

$$f(x_1,...,x_n)=(x_1-x_1^*)g(x_1,...,x_n)+h(x_2,...,x_n)$$

דוגמא: תהי $f(x_1,x_2,\lambda)$, ונניח כי $f(1,2,5)=0$. אז נוכל לכתוב

$$f(x_1,x_2,\lambda)=(\lambda-5)g(x_1,x_2,\lambda)+h(x_1,x_2)$$

ונמשיך:

$$(\lambda-5)g(x_1,x_2,\lambda)+h(x_1,x_2)=(\lambda-5)g(x_1,x_2,\lambda)+(x_2-2)\tilde{h}(x_1,x_2)+q(x_1)=$$

$$(\lambda-5)g(x_1,x_2,\lambda)+(x_2-2)\tilde{h}(x_1,x_2)+(x_1-1)\tilde{q}(x_1)$$

2.6.2 אינטגרל של שדה וקטורי

הגדרה 2.13 יהי $\{\dot{x}_i = F_i(x_1, ..., x_n)\}_{i=1}^n$ שדה וקטורי C^∞. אז $Q(x_1, ..., x_n)$ נקראת **האינטגרל הראשון** של השדה הוקטורי אם מתקיימים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

1. $Q\left(x_1(t), ..., x_n(t)\right) \equiv const$ לכל פתרון $(x_1(t), ..., x_n(t))$.
2. $\frac{\partial Q}{\partial x_1}F_1 + ... + \frac{\partial Q}{\partial x_n}F_n \equiv 0$.

את הוכחת השקילות נראה בתרגיל בית.

2.6.3 שדות וקטוריים המילטוניים

הגדרה 2.14 **שדה וקטורי המילטוני** הוא שדה וקטורי מהצורה

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

כאשר $H \in C^2$.[7] H נקרא **ההמילטוניאן** של השדה הוקטורי, וניתן להראות שהוא האינטגרל הראשון של השדה הוקטורי. תמונת הפאזה של השדה הוקטורי מורכבת בדיוק מהעקומים $H(x_1, x_2) = const$. באופן שקול, שדה וקטורי המילטוני הוא שדה $\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2), i \in \{1, 2\}$ עבורו $\begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$ הוא שדה משמר (ואז H היא הפוטנציאל של השדה המשמר). ניתן לומר גם ש-$\nabla F = 0$.

2.6.4 הלמה של מורס

משפט 2.15 **הלמה של מורס**: תהי

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2 + h.o.t.$$

---

[7] אנו נניח תמיד ש-$H \in C^\infty$.

אז ניתן לבצע החלפת משתנים $(y_1,...,y_n) \to (x_1,...,x_n)$ כך שבסביבה כלשהי של $0 \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y_1,...,y_n) = y_1^2 + ... + y_n^2$$

נובע מהלמה של מורס שתמונת הפאזה המקומית של שדה וקטורי המילטוני על $\mathbb{R}^2$ עם המילטוניאן מהצורה

$$H = x_1^2 + x_2^2 + h.o.t.$$

היא מרכז: כאשר $H(x_1,x_2) = const$, נוכל להחליף משתנים כך ש-$y_1^2 + y_2^2 = const$.

2.7 חזרה ליחסים רזונטיביים

יהי $L_A : W^{(m)} \to W^{(m)}$ אופרטור לינארי, כאשר $W^{(m)}$ הוא מרחב הפונקציות הוקטוריות ההומוגניות מדרגה m. למשל, עבור $n=2$,

$$W^{(2)} = span\left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}$$

באופן כללי,

$$W^{(m)} :\ basis\ \left\{e_{k,(\alpha)}\right\}$$

כאשר

$$k = 1,...,n$$

$$\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)\ 0 \le \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad |\alpha| = m$$

נגדיר

$$L_A(\phi) = A\phi - \underbrace{\phi'}_{Jacobian} Ax$$

נבחן את המקרה שבו A אלכסונית:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אז

$$L_A\left(l_{k,(\alpha)}\right) = A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ x^\alpha \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}}_{x^\alpha \ in \ k-th \ coordinate} - \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, ..., \alpha_n x_1^{\alpha_1} ... x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n - 1} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} Ax$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ \lambda_k x^\alpha \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}}_{k-th \ coordinate} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ \lambda_1 \alpha_1 x_1^\alpha + \lambda_2 \alpha_2 x^\alpha + ... + \lambda_n \alpha_n x^\alpha \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}}_{k-th \ coordinate} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ (\lambda_k - \alpha_1\lambda_1 - ... - \alpha_n\lambda_n)x^{\alpha} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}}_{k-th\ coordinate}$$

סה"כ,

$$L_A\left(l_{k,(a)}\right) = \left(\lambda_k - (\alpha,\lambda)\right) l_{k,(\alpha)}$$

כאשר

$$(\alpha,\lambda) \triangleq \alpha_1\lambda_1 + ... + \alpha_n\lambda_n$$

מסקנה 2.16 האופרטור L_A אינו סינגולרי $\iff$ $\lambda_k - (\alpha,\lambda) \neq 0$ לכל (α) כך ש-$|\alpha| = m$ ולכל $k = 1, ..., n$. כלומר, האופרטור אינו סינגולרי $\iff$ אין יחסים רזונטיביים ממעלה m.

ננסח את הלמה שהוכחנו מקודם:

למה 2.17 יהי $m \geq 2$ $\dot{x} = Ax + V_m + h.o.t.,$ כאשר $V_m \in W^{(m)}$, ו-$h.o.t.$ מכיל רק גורמים ממעלה גדולה מ-m. תהי

$$x = y + \phi_m \quad \phi_m \in W^{(m)}$$

התמרת קואורדינטות מקומית. אז תחת התמרה זו, השדה הוקטורי מקבל את הצורה

$$\dot{y} = Ay + V_m(y) + L_A(\phi_m) + \underbrace{\widetilde{h.o.t.}}_{degree>m}$$

מסקנה מיידית:

מסקנה 2.18 אם A אלכסונית ואין יחסים רזונטיביים ממעלה m ומטה, השדה הוקטורי שבלמה שקול לשדה וקטורי מהצורה $\dot{y} = Ay + \underbrace{\widetilde{h.o.t.}}_{degree>m}$. כלומר, ניתן להרוג איברים ממעלה m.

מסקנה 2.19 אם A אלכסונית ואין יחסים רזונטיביים מאף מעלה $m \geq 2$, השדה הוקטורי שבלמה ניתן ללינאריזציה.

הוכחה: תהי $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ו-$V = Ax + V_2 + V_3 + ...$ כאשר $V_i \in W^{(i)}$. אז קיים $\phi_2(y) \in W^{(2)}$ כך שעבור ההתמרה $x = y + \phi_2(y)$ נקבל

$$\dot{y} = Ay + \tilde{V}_3 + \tilde{V}_4 + ...$$

באופן דומה, קיים $\phi_3(z) \in W^{(3)}$ כך שעבור $y = z + \phi_3(z)$ נקבל

$$\dot{z} = Az + \tilde{\tilde{V}}_4 + \tilde{\tilde{V}}_5 + ...$$

מתקיים

$$x = y + \phi_2(y) = z + \phi_3(z) + \phi_2(z + \phi_3(z)) =$$

$$z + \phi_2(z) + \phi_3(z) + (degree \geq 4)$$

כעת נחליף $z \to w$:

$$z = w + \phi_4(w)$$

$$x = w + \phi_4(w) + \phi_2\left(w + \phi_4(w)\right) + \phi_3\left(w + \phi_4(w)\right) + (degree \geq 5) =$$

$$w + \phi_2(w) + \phi_3(w) + \phi_4(w) + (degree \geq 5)$$

$t + \sum_{i=2}^{\infty} \phi_2(t)$ מתכנס כטור חזקות פורמלי. לא נוכיח כרגע, אבל זה גורר את טענת המשפט גם ב-C^{∞}. ■

בהרבה מקרים, מספיק לנו לבחון מספר סופי של צעדים:[8]

$$V \sim \dot{x} = Ax + terms\ of\ degree \geq m$$

אם האופרטור L_A אינו על, ניתן עדיין לכתוב

$$W^{(m)} = ImL \oplus (ImL)^{\perp}$$

למרות הכתיבה הנ"ל, אין לנו א-פריורי מכפלה פנימית על המרחב, ו-$(ImL)^{\perp}$ אינו יחיד. עדיין, נוכל לקבוע איזשהו תת-מרחב המקיים את הנ"ל ולסמן אותו כך. נציג

$$V_m(y) = \underbrace{a}_{ImL} + \underbrace{b}_{(ImL)^{\perp}}$$

לכן ניתן להחליף את הגורם $V_m(y)$ באיזשהו גורם ב-$(ImL)^{\perp}$:

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{\widehat{V_m}}_{\in (ImL)^{\perp}} + V_{m+1} + (> m+1)$$

[8] הרצאה 8 - 20.11.2011

נחליף

$$x = y + \phi_{m+1} \in W^{(m+1)}$$

ניתן להראות שהגורם מסדר m לא ישתנה, לכן

$$\dot{y} = Ay + \widehat{V_m}(y) + V_{m+1}(y) + L\left(\phi_{m+1}\right)$$

טענה 2.20 יהי

$$\dot{x} = Ax + V_2(x) + ... + V_{k-1}(x) + V_k(x) + (> k)$$

אז אם נציב $x = y + \phi_k(y) \in W^{(k)}$,

$$\dot{y} = Ay + V_2(y) + ... + V_{k-1}(y) + V_k(y) + L\left(\phi_k\right) + (> k)$$

מסקנה 2.21 שדה וקטורי $\dot{x} = Ax + h.o.t.$ שקול פורמלית לשדה $\dot{y} = Ay + V_2 + V_3 + ...$, כאשר $V_i \in (ImL)^{\perp}$. אם A אלכסונית ואין יחסים רזונטיביים, $(ImL)^{\perp} = \{0\}$.

תהי $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. במקרה זה,

$$L_A(e_{k,(\alpha)}) = (\lambda_k - (\alpha, \lambda))\, e_{k,(\alpha)}$$

אם אין יחסים רזונטיביים, ראינו כי $(L_A)^{\perp} = \{0\}$. אם ישנם יחסים רזונטיביים, $(L_A)^{\perp}$ יהיה המרחב הנפרש על-ידי $\left\{e_{k,(\alpha)} :\ \lambda_k = (\alpha, \lambda)\right\}$.

הגדרה 2.22 המונום $l_{k,(\alpha)}$ נקרא **רזונטיבי** אם $\lambda_k = (\alpha, \lambda)$, $|\alpha| \geq 2$.

בעזרת הגדרה זו, נוכל לנסח את

משפט 2.23 (פונקרה-דולאק): $\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + h.o.t.$ שקול פורמלית לשדה $\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y + resonant\ non-linear\ terms$.

2.8 מספרי מוקד

נבחן כעת את השדה הוקטורי שלנו מעל $\mathbb{C}$. אם $\lambda_{1,2} = \pm i\alpha, \alpha \neq 0$, המטריצה A דומה ל- $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, ולכן

$$\dot{x}_1 = \alpha x_2 + h.o.t.$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_1 + h.o.t.$$

אם נגדיר $z_1 = x_1 + ix_2, x_2 = x_1 - ix_2$, ניתן לכתוב את החלק הלינארי של השדה בצורה

$$\begin{matrix} \dot{z}_1 = \alpha i z_1 \\ \dot{z}_2 = -\alpha i z_2 \end{matrix} \quad , z_2 = \overline{z_1}$$

היחסים הרזונטיביים:

$$\lambda_1 = \alpha i$$

$$\lambda_2 = -\alpha i$$

$$\lambda_1 = (l+1)\lambda_1 + l\lambda_2$$

$$\lambda_2 = s\lambda_1 + (s+1)\lambda_2$$

המונומים הרזונטיביים הם

$$\begin{pmatrix} z_1^{l+1} z_2^l \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z_1^l z_2^{l+1} \end{pmatrix}$$

השדה המלא:

$$\dot{z}_1 = \alpha i z_1 + a_1 z_1^2 z_2 + a_2 z_1^3 z_2^2 + ... = \alpha i z_1 + z_1 f_1(z_1 z_2)$$

$$\dot{z}_2 = -\alpha i z_2 + b_1 z_1 z_2^2 + b_2 z_1^2 z_2^3 + ... = -\alpha i z_2 + z_2 f_2(z_1 z_2)$$

כאשר

$$f_1(w) = \sum a_i w^i, f_2(w) = \sum b_i w^i$$

$$b_i = \overline{a_i}$$

המרחק מהראשית הוא $R = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} = \sqrt{z_1 z_2}$.

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{z\bar{z}}} \frac{d}{dt}(z\bar{z}) = \frac{1}{2R}\left(\left[\alpha i z_1 + z_1 f_1(z_1 z_2)\right] z_2 + \left[-\alpha i z_2 + z_2 f_2(z_1 z_2)\right] z_1\right) =$$

$$\frac{R}{2}\left(f_1\left(R^2\right) + f_2\left(R^2\right)\right) = R \cdot \Re\left(f_1\left(R^2\right)\right)$$

בחישובים לעיל, כמעט הוכחנו את[9]

משפט 2.24 שדה וקטורי על $\mathbb{R}^2$ מהצורה

$$\dot{x}_1 = \alpha x_2 + h.o.t.$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_1 + h.o.t.$$

שקול פורמלית[10] לשדה וקטורי ממשי אחר על $\mathbb{R}^2$ שבקואורדינטות z_1, z_2 הנ"ל מקבל את הצורה

$$\dot{z} = \alpha i z + \sum_{l \geq 1} a_l z_1^{l+1} z_2^l$$

כדי להוכיח את המשפט לגמרי, יש להוכיח שהתכונה $f_2(z_1, z_2) = \overline{f_1}(z_1, z_2)$ נשמרת תחת התמרת קואורדינטות המעבירה אותנו לשדה ממשי. אנחנו לא נראה זאת.

ראינו כי

$$\frac{dR}{dt} = R \cdot \Re\left(f_1\left(R^2\right)\right)$$

אם $f_1(w) = \sum_{l \geq 1} a_l w^l$,

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{l \geq 1} \Re(a_l) R^{2l+1}$$

כעת נבחן את הזווית. מתקיים

$$z_1 = Re^{i\theta}$$

[9] הרצאה 9 - 23.11.2011

[10] כפי שראינו, עבור $h.o.t.$ פולינומיאלי זה מספיק.

$$\dot{z} = \dot{R}e^{i\theta} + iRe^{i\theta}\dot{\theta}$$

נשים לב שאנו מניחים ש-θ גזירה - אפשר לעשות זאת, כיוון שהתמרת הקואורדינטות שמעבירה את $z_1, z_2 \to \theta$ גזירה מחוץ לראשית.

$$\Rightarrow \dot{z}_1 = \sum_{l\geq 1} \Re(a_l)R^{2l+1}e^{i\theta} + Re^{i\theta}i\dot{\theta}$$

מצד שני,

$$\dot{z}_1 = \alpha i z_1 + \sum_{l\geq 1} a_l z_1^{l+1} z_2^l = z_1\left(\alpha i + \sum_{l\geq 1} a_l R^{2l}\right) = Re^{i\theta}\left(\alpha i + \sum_{l\geq 1} a_l R^{2l}\right)$$

לכן

$$\sum_{l\geq 1} \Re(a_l)R^{2l} + i\dot{\theta} = \left(\alpha i + \sum_{l\geq 1} a_l R^{2l}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\alpha i + \sum_{l\geq 1} a_l R^{2l} - \sum_{l\geq 1}\Re(a_l)R^{2l}}{i} =$$

$$\alpha + \sum_{l\geq 1}\Im(a_l)R^{2l}$$

הגדרה 2.25 המספרים $f_l \triangleq \Re(a_l)$ נקראים **מספרי המוקד** של השדה הוקטורי.

נניח ש-$f_1 \neq 0$. אז

$$\frac{dR}{dt} = f_1 R^3 + o\left(R^3\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha + \Im(a_1)R^2 + o\left(R^2\right)$$

לכן הסימן של $\dot{\theta}$ זהה לזה של α בסביבה קטנה של $0 \in \mathbb{R}^2$, והסימן של $\dot{R}$ זהה לזה של f_1 בסביבה קטנה של $0 \in \mathbb{R}^2$. אם $f_1 > 0$, $R(t)$ היא פונקציה עולה של t. נניח בשלילה ש-$R(t) \leq \varepsilon$. אז $R(t)$ מתכנסת לגבול $R_0 \leq \varepsilon$. לכן $\dot{R} > \delta > 0$ לכל t, כיוון ש-$f_1 > 0$. אבל אז $R(t) \geq R_0 + \delta t$, וזו סתירה.

2.8.1 אלגוריתם למציאת מספרי מוקד[11]

נתאר אלגוריתם למציאת מספר המוקד הראשון של $\dot{x} = Ax + h.o.t.$, כאשר ל-A ערכים עצמיים $\pm\alpha i$.

1. נלכסן את A על-ידי התמרה לינארית $x = Tz$ עם וקטורים עצמיים $\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

דוגמה: עבור $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$, הערכים העצמיים של המטריצה הם $\pm i$. וקטורים עצמיים: $\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$. אם כן, ההתמרה היא

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} z$$

2. נציב חזרה במערכת המקורית. בדוגמה שלנו,

$$\dot{x} = T\dot{z} = ATz + \begin{pmatrix} (z_1+z_2)^2 \\ (z_1+z_2)\left((2-i)z_1 + (2+i)z_2\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} z + T^{-1} \begin{pmatrix} z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 \\ (2-i)z_1^2 + (2+i)z_2^2 + 4z_1z_2 \end{pmatrix}$$

[11] הרצאה 10 - 27.11.2011

$$T^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ -2+i & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} z + \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ -2+i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 \\ (2-i)z_1^2 + (2+i)z_2^2 + 4z_1z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ -2+i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 \\ (2-i)z_1^2 + (2+i)z_2^2 + 4z_1z_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (2+i)z_1^2 + 2(2+i)z_1z_2 + (2+i)z_2^2 - (2-i)z_1^2 - (2+i)z_2^2 - 4z_1z_2 \\ (-2+i)z_1^2 + 2(-2+i)z_1z_2 + (-2+i)z_2^2 + (2-i)z_1^2 + (2+i)z_2^2 + 4z_1z_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2iz_1^2 + 2iz_1z_2 \\ 2iz_1z_2 + 2iz_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} z_1^2 + z_1z_2 \\ z_1z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

הקואורדינטות אכן מצומדות.

3. כעת יש לנו מערכת מהצורה

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\alpha i \end{pmatrix} z + \underbrace{V^{(2)}(z) + V^{(3)}(z)}_{*} + h.o.t.$$

מספר המוקד הראשון f_1 תלוי רק ב-$*$. בשלב זה, עלינו למצוא את הטרנספורמציה שהורגת את $V^2(z)$ - זה אפשרי כיוון שאין מונומים רזונטיביים ממעלה 2.

$$z = w + \begin{pmatrix} \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_1w_2 + \alpha_3 w_2^2 \\ \beta_1 w_1^2 + \beta_2 w_1w_2 + \beta_3 w_2^2 \end{pmatrix}$$

כיוון שהקואורדינטות מצומדות, $w_1 = \overline{w_2} \Rightarrow \beta_1 = \overline{\alpha_3}, \beta_2 = \overline{\alpha_2}, \beta_3 = \overline{\alpha_1}$.

$$V^{(2)}(z) = \begin{pmatrix} az_1^2 + bz_1z_2 + cz_2^2 \\ \bar{c}z_1^2 + \bar{b}z_1z_2 + \bar{a}z_2^2 \end{pmatrix}$$

נביט באופרטור L: הוא מכפיל כל מונום באיבר הרזונטיבי שלו, לדוגמה

$$L\begin{pmatrix} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}(\lambda_1 - 2\lambda_2) = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}(-\alpha i)$$

לכן

$$V^{(2)}(z) \to V^{(2)}(w) + \begin{pmatrix} -i\alpha_1 w_1^2 + i\alpha_2 w_1 w_2 + 3i\alpha_3 w_2^2 \\ -3i\overline{\alpha_1} w_1^2 - i\overline{\alpha_2} w_1 w_2 + i\overline{\alpha_3} w_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

מכאן

$$\alpha_1 = -ia, \alpha_2 = ib, \alpha_3 = \frac{1}{3} ic$$

בדוגמה,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -iw_1^2 + iw_1 w_2 \\ -iw_1 w_2 + iw_2^2 \end{pmatrix}$$

4. כעת

$$\dot{z} = \dot{w} + \left(\phi^{(2)}\right)'(w) \cdot \dot{w} = \left[I + \left(\phi^{(2)}\right)'(w)\right]\dot{w} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\alpha i \end{pmatrix}\left[w + \left(\phi^{(2)}\right)(w)\right] + V^{(2)}\left(z \to w + \left(\phi^{(2)}\right)(w)\right) +$$

$$V^{(3)}\left(z \to w + \left(\phi^{(2)}\right)(w)\right) + (\geq 4)$$

2.9 לידה ומוות של מחזור גבול[12]

יהי ε פרמטר. נכתוב את השדה הוקטורי (C^∞ או אנליטי) שלנו בצורה הבאה:

$$\dot{x} = V(\varepsilon, x)$$

[12] הרצאה 11 - 30.11.2011

נניח ש-$\varepsilon = 0$ הוא הערך בו מתקבלת ביפורקציה בנש"מ $x = 0 \in \mathbb{R}^2$. למטריצת הלינאריזציה יש את הערכים העצמיים $\pm\alpha i, \alpha \neq 0$. ממשפט הפונקציות הסתומות נובע כי לכל ε קרוב ל-$0 \in \mathbb{R}$ יש נש"מ יחידה מקומית $x^* (\varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(\varepsilon) \\ f_2(\varepsilon) \end{pmatrix}$, כאשר התלות ב-$\varepsilon$ היא חלקה (C^∞) או אנליטית בהתאמה. נגדיר קואורדינטות חדשות:

$$\tilde{x}_1 = x_1 - f_1(\varepsilon)$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 - f_2(\varepsilon)$$

בקואורדינטות החדשות, $0 \in \mathbb{R}^2$ היא נש"מ לכל ε. כך אנחנו יכולים לבצע רדוקציה למצב

$$\dot{x} = V (\varepsilon, x)$$

$$V (\varepsilon, 0) = 0 \quad \forall\varepsilon$$

ול-$V_x' (0, 0)$ ע"עים $\pm\alpha i, \alpha \neq 0$. מכאן של-$V_x' (\varepsilon, 0)$ יש ע"עים $f(\varepsilon) \pm i \cdot g(\varepsilon)$ כאשר f, g חלקות או אנליטיות ו-$f(0) = 0, g(0) = \alpha$. עבור ביפורקציות הופף, יש לדרוש $f'(0) \neq 0$. אנו נניח בה"כ ש-$f'(0) > 0$. כמו מקודם, נוכל לכתוב

$$\dot{x} = V (\varepsilon, x) = A(\varepsilon)x + h.o.t.$$

כאשר כעת $h.o.t.$ תלוי גם ב-x וגם ב-ε. אנו יכולים ללכסן את A:

$$A(0) \mapsto T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha i & 0 \\ 0 & -\alpha i \end{pmatrix}$$

נשתמש במשפט הבא (ללא הוכחה):

משפט 2.26 אם $A(\varepsilon)$ היא משפחה של מטריצות $n \times n$ התלויות באופן חלק / אנליטי ב-ε כך של-$A(0)$ יש n ע"עים שונים, קיימת משפחה $T(\varepsilon)$ התלויות באופן חלק / אנליטי בהתאמה ב-ε כך ש-

$$T(\varepsilon)^{-1}A(\varepsilon)T(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_i(\varepsilon)$ הם הע"עים של $A(\varepsilon)$.

אם כן, נוכל ללכסן את $A(\varepsilon)$:

$$A(\varepsilon) \mapsto T(\varepsilon)^{-1}A(\varepsilon)T(\varepsilon) = \begin{pmatrix} f(\varepsilon)+ig(\varepsilon) & 0 \\ 0 & f(\varepsilon)-ig(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

אנו יכולים לפשט את המצב עוד יותר: כיוון ש-$f(0)=0$ ו-$f'(0)>0$, קיים דיפאומורפיזם מקומי $\tilde{\varepsilon} \to f(\varepsilon)$. לכן נוכל להניח ש-$f(\varepsilon)=\varepsilon$ בכל מקרה. לכן המערכת שלנו מקבלת את הצורה

$$\dot{x} = V(\varepsilon,x) = A(\varepsilon)x + h.o.t. = \begin{pmatrix} \varepsilon+ig(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \varepsilon-ig(\varepsilon) \end{pmatrix} x + h.o.t.$$

הלינאריזציה של המערכת ללא פרמטר הייתה תלויה ביחסים הרזונטיביים. למשל, אם $\lambda_1-\alpha_1\lambda_1-\alpha_2\lambda_2 \neq 0$, המונום

$$a\begin{pmatrix} x^{\alpha_1\alpha_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

נהרג על-ידי

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{a}{\lambda_1-\alpha_1\lambda_1-\alpha_2\lambda_2}\begin{pmatrix} x^{\alpha_1\alpha_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת היחסים הרזונטיביים ישתנו יחד עם ε. מרציפות, אם אין יחסים רזונטיביים ב-$\varepsilon = 0$, לא יהיו כאלה גם בסביבה קטנה כלשהי של 0. לכן כל מונום שניתן להרוג עבור $\varepsilon = 0$ ניתן להרוג עבור כל ε קטן מספיק. ראינו כי במקרה של $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i$, זה שקול לכך ש-$(\alpha_1, \alpha_2) \neq (l+1, l)$ עבור l שלם אי-שלילי. המסקנה: אנו יכולים להעביר את השדה הוקטורי לצורה[13]

$$\dot{z} = (\varepsilon + ig(\varepsilon))\, z + \sum_{l\geq 1} a_l(\varepsilon) z^{l+1}\overline{z}^l$$

עבור $\varepsilon = 0$,

$$\dot{R} = 0 \cdot R + f_1 \cdot R^3 + f_2 \cdot R^5 + ...$$

אך כעת, אם נחזור על החישוב עבור $\varepsilon \neq 0$, נקבל

$$\dot{R} = \varepsilon \cdot R + f_1(\varepsilon) \cdot R^3 + f_2(\varepsilon) \cdot R^5 + ... =$$

$$R\left(\varepsilon + f_1(\varepsilon)R^2 + o\left(R^2\right)\right)$$

$$\dot{\theta} = g(\varepsilon) + h.o.t.$$

האם ייתכן ש-$\dot{R} = 0$? זה שקול ל-

$$\varepsilon + f_1(\varepsilon)R^2 + o\left(R^2\right) = 0$$

[13] הקואורדינטה השנייה מצומדת

1. במקרה $f_1(0) < 0$, אם $\varepsilon < 0$, הנ"ל יהיה שלילי ולכן זהו המקרה של **מוקד יציב**. אם $\varepsilon > 0$, $\varepsilon + f_1(\varepsilon)R^2 = 0$ כאשר $R = \sqrt{\frac{\varepsilon}{|f_1(\varepsilon|}}$. לכן הנ"ל מתאפס עבור נקודה קרובה:

$$R^* = \sqrt{\frac{\varepsilon}{|f_1(\varepsilon)|}}\left(1 + O(1)\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{|f_1(0)|}} + o\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$$

בנוסף, R גדל עבור $0 < R < R^*$ וקטן עבור $R > R^*$. לכן זהו המקרה של **מחזור גבול יציב**. מקרה זה גם נקרא המקרה של **אוסילציות רכות**, כיוון שהתהליך הפיך - אם נתחיל עם $\varepsilon < 0$, נעבור ל-$0 < \varepsilon$ ואז חזרה ל-$\varepsilon < 0$, אנחנו נחזור לנקודה שבה התחלנו.

2. במקרה $f_2(0) < 0$, ניתן לבצע ניתוח סימטרי ולהגיע למסקנה שעבור $\varepsilon > 0$ זהו המקרה של **מוקד לא-יציב** ושעבור $\varepsilon < 0$ זהו המקרה של **מחזור גבול לא-יציב**. מקרה זה גם נקרא המקרה של **אוסילציות קשיחות** כיוון שאם נעבור מ-$0 > \varepsilon$ ל-$\varepsilon < 0$ ואז נחזור ל-$\varepsilon > 0$, ייתכן שהמסלול שלנו "יברח" החוצה ממחזור הגבול.

3. אם $f_1(0) = 0$, צריך להוסיף עוד פרמטר למערכת כדי שיהיה פתרון - לכן במקרה שלנו ניתן להניח ש-$f_1(0) \neq 0$.

4. בכל מקרה, ניתן לראות ש-$g(\varepsilon)$ קובעת רק את כיוון הסיבוב.

3 ביפורקצית אנדרונוב-הופף כפולה[14]

כדי לקבל ביפורקצית הופף כפולה, אנו נצטרך מערכת התלויה ב-2 פרמטרים. נסמן אותם ב-$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ונניח שהנש"מ היא הראשית והביפורקציה מתרחשת כש-$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. הערכים העצמיים יהיו

$$\lambda_{1,2} = a\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right) \pm i\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$$

$$a(0,0) = 0$$

[14] הרצאה 12 - 4.12.2011

ונדרוש

$$\nabla_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} a \neq 0$$

כלומר, אחת הנגזרות בראשית אינה מתאפסת. נניח בה"כ שזו הנגזרת לפי ε_1. תחת דרישות אלו, נוכל בעזרת דיפאומורפיזם לוקלי לקבל שני פרמטרים חדשים

$$a\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right) = \tilde{\varepsilon}_1$$

$$\varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_2$$

נניח מעתה שזוהי אכן הצורה של a. בעזרת ניתוח דומה לזה שביצענו עבור ביפורקצית הופף רגילה, נוכל להגיע למשוואה

$$\dot{R} = \varepsilon_1 R + f_1\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right) R^3 + f_2\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right) R^5 + o\left(R^5\right)$$

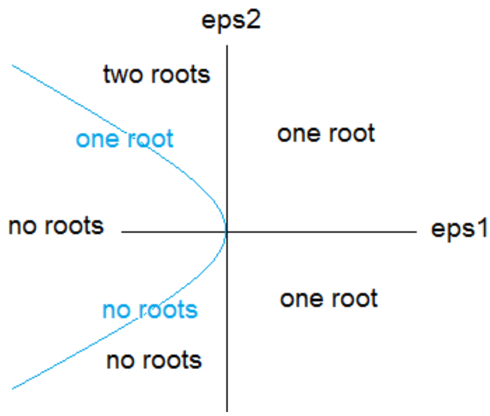
כדי לקבל ביפורקציה כפולה, אנו נדרוש $f_1(0,0) = 0, f_2(0,0) \neq 0$. בנוסף, כמו במקרה הקודם, נדרוש

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_2}(0,0) \neq 0$$

נכתוב מחדש את $\dot{R}$:

$$\dot{R} = \varepsilon_1 R + \varepsilon_2 R^3 + f_2\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right) R^5 + o\left(R^5\right)$$

$$f_2(0,0) \neq 0$$



איור 1:

האזורים שבהם קיימים פתרונות ל-R כאשר $f_2(0,0) < 0$.

נוכל לפשט עוד:

$$\dot{R} = \varepsilon_1 R + \varepsilon_2 R^3 + \underbrace{f_2\left(0,0\right)}_{\neq 0} R^5 + o\left(R^5\right)$$

ניתן להראות שהטופולוגיה של שתי המערכות האחרונות זהה.

$$\varepsilon_1 R + \varepsilon_2 R^3 + f_2\left(0,0\right) R^5 = 0 \underbrace{\Longleftrightarrow}_{y=R^2}$$

$$f_2\left(0,0\right) y^2 + \varepsilon_2 y + \varepsilon_1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 - 4\varepsilon_1 f_2(0,0)}}{2f_2(0,0)}$$

1. **המקרה** $f_2(0,0) < 0$: אם $\varepsilon_2^2 - 4\varepsilon_1 f_2(0,0) < 0$, אין למשוואה פתרונות. זהו התחום $\varepsilon_1 < \frac{1}{4f_2(0,0)}\varepsilon_2^2$, התחום שמשמאל לפרבולה $\frac{1}{4f_2(0,0)}\varepsilon_2^2$ במישור $\varepsilon_1\varepsilon_2$. בעזרת ניתוח דומה לשאר האזורים, נגיע לחלוקה שבאיור 1. באזור שמימין לפרבולה ברביע השני, נקבל שני פתרונות ל-R שנסמן ב-R_2^*, R_1^*. כיוון שהפרבולה שלילית, R_1^* מציין מחזור גבול לא-יציב ו-R_2^* מחזור גבול יציב.

2. **המקרה** $f_2(0,0)>0$: בתרגיל בית.

נמשיך עם ההנחה $f_2<0$.מה קורה על הצירים עצמם? כאשר $\varepsilon_1=0,\varepsilon_2>0$, נקבל מחזור גבול יציב יחיד, כיוון ש-[15]

$$y_{1,2}=\frac{-\varepsilon_2\pm\varepsilon_2}{2f_2}=0,\frac{-\varepsilon_2}{f_2}$$

בעצם, כאשר מתקרבים ל-$\varepsilon_1=0$ מהאזור בו ישנם שני מחזורי גבול, אחד המחזורים מתכווץ לנקודה. אם $\varepsilon_1=0,\varepsilon_2<0$ לא יהיו מחזורי גבול כלל. אם $\varepsilon_2=0,\varepsilon_1>0$ נקבל

$$y_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{-4f_2\varepsilon_1}}{2f_2}$$

לכן מתקבל מחזור גבול יחיד, ואם $\varepsilon_2=0,\varepsilon_1<0$ ניתן לראות שאין מחזורי גבול.

נדמיין לעצמנו שאנו מתחילים מנקודה בתחום בו יש שני מחזורי גבול והולכים על מעגל שעובר בכל התחומים בכיוון השעון. כאשר נחצה את החלק החיובי של ציר ε_2, שני מחזורי הגבול שלנו יתאחדו למחזור גבול יחיד, וכך ימשיכו עד לחלק השלילי של ציר ε_2, בו מחזור הגבול מתכווץ לנקודה בראשית. כך זה יימשך עד שנחתוך את החלק העליון של הפרבולה, שם יופיע מחזור גבול, ולאחר מכן הוא יתפצל שוב לשני מחזורי גבול. תוך כדי תנועה זו, היציבות של הראשית ושל מחזורי הגבול משתנה גם כן. מה אם נלך נגד כיוון השעון? שני מחזורי הגבול יתכווצו למחזור גבול אחד, יציב-למחצה, שייעלם לאחר מכן.

4 ביפורקציות נוספות

4.1 ביפורקצית צומת־אוכף

בביפורקצית הופף, השינוי הטופולוגי במערכת שלנו התקבל כיוון שהערכים העצמיים היו בעלי חלק ממשי אפס, ולכן שינוי קטן בפרמטר יכל להפוך אותם לחיוביים או שליליים. המקרה היחיד

[15] הרצאה 13 - 7.12.2011

חוץ מזה שבו מתרחש שינוי כזה הוא כאשר אחד הערכים העצמיים שונה מאפס והשני שווה לאפס. נניח, למשל, שהע"עים הם

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

מהם היחסים הרזונטיביים?

$$\lambda_1 = \alpha\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 \quad \alpha \geq 2$$

$$\lambda_2 = \beta\lambda_1 + \lambda_2 \quad \beta \geq 1$$

המונומים הרזונטיביים הם

$$\begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ x_1^\beta x_2 \end{pmatrix}$$

הצורה הנורמלית הרזונטיבית:

$$\dot{x}_1 = a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4 + ...$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + b_1x_1x_2 + b_2x_1^2x_2 + b_3x_1^3x_2 + ...$$

לכן ללא קשר לשאר המקדמים, $x_2 \to 0$ בסביבה קטנה מספיק של הראשית. אם כן, היציבות של המערכת תלויה רק ב-a_i הראשון ששונה מאפס. אם $a_2 \neq 0$, $\dot{x}_1$ בעל אותו סימן תמיד ־ גם משמאל וגם מימין לראשית. אם $a_2 = 0$ ו־$a_3 \neq 0$, יציבות תלויה בסימן של a_3.

עבור ביפורקצית הופף, כדי להראות שהערכים העצמיים תלוים באופן חלק בפרמטר, השתמשנו בכך ש-$|A| \neq 0$. אך כאן **תמיד** מתקיים $|A| = 0$. ייתכן מצב שבו בכלל לא יהיו נש"מ לאחר שינוי פרמטר. למשל, המערכת

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + \varepsilon$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

לכן כדי להתייחס לשינוי הפרמטר, נצטרך לתקן את $\dot{x}_1$ באופן הבא:

$$\dot{x}_1 = f_0(\varepsilon) + f_1(\varepsilon)x_1 + a_2(\varepsilon)x_1^2 + a_3(\varepsilon)x_1^3 + a_4(\varepsilon)x_1^4 + ...$$

תרגיל: נסו לנתח את המערכת

$$\dot{x}_1 = \varepsilon \pm x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^2$$

ננתח את המערכת[16]

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + \varepsilon$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$

אם $\varepsilon < 0$, אין נש"מ. אם $\varepsilon > 0$, קיימות שתיים. מטריצת יעקובי היא

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי עבור $(2\sqrt{\varepsilon}, 0)$ מתקבל אוכף, ועבור $(-2\sqrt{\varepsilon}, 0)$ מתקבל צומת יציב. אנו נראה שבמקרה הגנרי, תחת הנחות מסוימות, זו הסיטואציה הכללית של ביפורקצית צומת־אוכף במשפחות בעלות פרמטר אחד.

[16] הרצאה 14 - 11.12.2011

מה אם עבור $\varepsilon = 0$ מתקבלים שני ע"עים זהים, נניח $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$? ממשפט הפונקציות הסתומות, נובע ששינוי ε ייצור נש"מ יחידה מקומית. ייתכן ששני הע"עים נשארים זהים, אך ייתכן גם שהם נפרדים לשני ע"עים שליליים או לשני ע"עים מרוכבים צמודים.

4.2 לינאריזציה של משפחה של מערכות[17]

ראינו כי אם A מטריצה אלכסונית ואין יחסים רזונטיביים, ניתן לבצע למערכת $\dot{x} = Ax + h.o.t.$ לינאריזציה על־ידי התמרת קואורדינטות פורמלית, ועל־ידי התמרה פולינומיאלית, ניתן להרוג איברים עד כל סדר סופי. **משפט זה נכון גם במקרה ש־A אינה אלכסונית, ואפילו לא לכסינה.** הוכחנו גם את הגרסה של המשפט למשפחה של מערכות התלויות בפרמטר ε:

משפט 4.1 אם $\dot{x} = A(\varepsilon)x + h.o.t.$ ואין יחסים רזונטיביים בין הע"עים של $A(0)$, ניתן להרוג איברים עד כל סדר סופי, כלומר, להביא את המערכת לצורה

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + (degree \geq m)$$

לכל m, על־ידי התמרת קואורדינטות פולינומיאלית ביחס ל־x עם מקדמים התלוים באופן חלק ב־ε.

גם אם אין יחסים רזונטיביים עבור $\varepsilon = 0$, ייתכן שיהיו כאלה עבור $\varepsilon \neq 0$. למשל, אם הע"עים של $A(\varepsilon)$ הם

$$\lambda_1 = \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = -1 + \varepsilon$$

האם קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, אין יחסים רזונטיביים? התשובה היא לא, כלומר, אנו טוענים ש־

$$\forall \varepsilon_0 \ \exists \varepsilon : \ |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

[17] הרצאה 15 - 14.12.2011

$$m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0 \quad 1 \le m, n \in \mathbb{Z}$$

זה שקול ל־

$$\frac{\sqrt{2}}{-1+\varepsilon} = -\frac{n}{m}$$

$$m\sqrt{2} = n\left(1-\varepsilon\right)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{m}{n}\sqrt{2}$$

לכן באופן כללי, לינאריזציה מלאה אינה אפשרית עבור משפחה חד־פרמטרית של מערכות. לינאריזציה עד סדר סופי תלויה רק במספר סופי של יחסים רזונטיביים ־ כאלה עבורם $m \le |\alpha|$. לכן מרציפות, אם היחסים לא מתקיימים עבור $\varepsilon = 0$ הם לא מתקיימים בסביבה כלשהי, התלויה ב־m. לינאריזציה מלאה דורשת שלא יתקיימו יחסים מכל סדר, וזה לא מובטח מרציפות. נציין שקיימות משפחות חד־פרמטריות הניתנות ללינאריזציה מלאה, למשל

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2} + \varepsilon$$

את הטענה הבאה ניתן להוכיח בעזרת חישוב פשוט:

טענה 4.2 אם ל־$\Re\left(\lambda_i(0)\right)$, לכל i, יש אותו סימן, ובנוסף, אין יחסים רזונטיביים כאשר $\varepsilon = 0$, אין יחסים רזונטיביים **מסדר כלשהו** בסביבה מסוימת של $\varepsilon = 0$. בפרט, ניתן לבצע לינאריזציה פורמלית מלאה למערכת: $\dot{x} = Ax + h.o.t. \to \dot{x} = Ax$.

משפט 4.3 משפט פואנקרה: אם ל־$\Re\left(\lambda_i(0)\right)$, לכל i, יש אותו סימן, ניתן לבצע לינאריזציה **אנליטית** (בניגוד לפורמלית) למערכת.

מסקנה 4.4 אם $x\in\mathbb{R}^2$, $\dot{x}=V\left(\varepsilon,x\right)$ ועבור $\varepsilon=0$, $\dot{x}=Ax+h.o.t.$, ול־A יש רק ע"ע אחד שונה מאפס, קיימת לינאריזציה אנליטית

$$\dot{x}=V\left(\varepsilon,x\right)\sim\dot{x}=A\left(\varepsilon\right)x$$

מסקנה 4.5 סיווג המשפחות של שדות וקטוריים עבורם $\lambda_1=\lambda_2\neq0$ כאשר $\varepsilon=0$ מצטמצם לסיווג של $A\left(\varepsilon\right)$ ביחס לדימיון:

$$A\left(\varepsilon\right)\to T^{-1}\left(\varepsilon\right)A\left(\varepsilon\right)T\left(\varepsilon\right)$$

למשל, ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט 4.6 אם $A(0)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ עבור $\lambda\neq0$ ממשי, $A\left(\varepsilon\right)$ דומה למטריצה $\begin{pmatrix}\lambda+f_1\left(\varepsilon\right) & 1\\ f_3\left(\varepsilon\right) & \lambda+f_2\left(\varepsilon\right)\end{pmatrix}$, כאשר $f_i(0)=0$ לכל $i\in\{1,2,3\}$.

במשפחה חד־פרמטרית, נוכל להניח ש־$f_3'(0)\neq0$.

מסקנה 4.7 $f_3\left(\varepsilon\right)\mapsto\varepsilon$ היא דיפאומורפיזם מקומי.

5 סוגי שקילות של שדות וקטוריים[18]

5.1 משקילות פורמלית לשקילות חלקה

הגדרה 5.1 פונקציה נקראת **חלקה** (C^∞) בנקודה אם היא גזירה מכל סדר בנקודה. פונקציה נקראת **אנליטית** בנקודה אם טור טיילור שלה מתכנס אליה בסביבה כלשהי של הנקודה.

[18] הרצאה 16 - 18.12.2011

קיימות פונקציות חלקות שאינן אנליטיות, למשל $g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

משפט 5.2 (בורל): לכל טור חזקות פורמלי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ קיימת $f\in C^{\infty}$ כך שהטור הנ"ל הוא טור טיילור שלה.

f במשפט אינה יחידה! למשל, ל־f ול־$f+g$, עבור g הנ"ל, יהיה אותו טור טיילור.

ראינו כי $\dot{x}=Ax \sim \dot{x}=Ax+h.o.t.$ פורמלית תחת תנאים מתאימים. בעזרת משפט בורל, ניתן להראות שקילות חלקה בין השדות הוקטוריים: נבחר את התמרת הקואורדינטות

$$x=y+\xi(y)$$

כאשר $\xi\in C^{\infty}$ היא הפונקציה הנתונה ממשפט בורל שטור טיילור שלה הוא בדיוק טור החזקות הפורמלי שבעזרתו ביצענו לינאריזציה ל־$\dot{x}=Ax+h.o.t.$. כך אנו מקבלים שדה וקטורי $\dot{y}=Ay+\tau(y)$ כך שטור טיילור של τ מתאפס זהותית.

הגדרה 5.3 פונקציה חלקה בעלת טור טיילור המתאפס זהותית נקראת **שטוחה** (בנקודה).

כדי לבצע לינאריזציה, אנו רוצים להרוג את החלק השטוח $\tau(y)$ של השדה הוקטורי. לשם כך, נבצע התמרה

$$y=z+\mu(z)$$

כאשר μ שטוחה. זו ודאי האפשרות היחידה אם ניתן לבצע לינאריזציה, אך מה צריכה להיות μ כדי שזה יעבוד?

הגדרה 5.4 שדה וקטורי V המקיים $V(0)=0$ נקרא **היפרבולי** אם כל הע"עים $\{\lambda_i\}$ של המטריצה המתארת את החלק הלינארי מקיימים $\Re(\lambda_i)\neq 0$.

משפט 5.5 משפט סטרנברג־צ'ן: אם V הוא שדה היפרבולי חלק ו־τ שטוחה ב־0, $V\sim V+\tau$ באופן חלקה.

מסקנה 5.6 עבור שדה וקטורי היפרבולי, שקילות פורמלית שקולה לשקילות חלקה.

טענה 5.7 שדה וקטורי ללא יחסים רזונטיביים הוא בהכרח היפרבולי.

הוכחה: נניח שהשדה אינו היפרבולי. אז או שאחד הע"עים הוא 0, או שישנם שני ע"עים מדומים מצומדים. בכל מקרה ישנם יחסים רזונטיביים. ■

הערה 5.8 ההפך אינו נכון! למשל, נבחר שדה וקטורי עם ע"עים $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

מסקנה 5.9 כל שדה וקטורי חלק ללא יחסים רזונטיביים שקול באופן חלק לקירוב הלינארי שלו.

דוגמה: נביט במרכז הלינארי

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

נוסיף לשדה פונקציה וקטורית שטוחה τ. בקואורדינטות פולריות נקבל $\dot{R} = \tau\left(R, \theta\right)$. למשל, $\dot{R} = e^{-\frac{1}{R^2}}$. לכן $\dot{R} \geq 1$ ו־R תמיד גדל. לכן נקבל מוקד לא־יציב ולא מרכז. **מסקנה:** תוספת של פונקציה שטוחה עשויה לשנות לא רק את היציבות, אלא גם את הטופולוגיה של תמונת הפאזה. אם נוסיף $\tau\left(R\right) = e^{-\frac{1}{R}} \sin\left(\frac{1}{R}\right)$, נקבל תמונת פאזה נוספת.

משפט 5.10 (ברליצקי, 1982): עבור שדות וקטוריים עם $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i$ כך שאחד ממספרי המוקד שונה מאפס, שקילות חלוקה שקולה לשקילות פורמלית.[19]

5.2 המקרה האנליטי

שאלה: נניח כי אין יחסים רזונטיביים, ולכן ניתן לבצע לינאריזציה פורמלית. האם קיימת לינאריזציה אנליטית? **באופן שקול**, האם הלינאריזציה הפורמלית מתכנסת?

[19] הרצאה 17 - 21.12.2011

כאשר ביצענו לינאריזציה פורמלית, אחת מהפעולות שביצענו היא חלוקה ב־$\lambda_i-(\alpha,\lambda)$ כאשר $|\alpha|=m$. זו הייתה החשיבות של אי־קיומם של יחסים רזונטיביים. נניח שזו הפעולה היחידה, ושהטור $\sum a_\alpha x^\alpha$ מייצג את הפונקציה האנליטית שלנו. מתי $\sum \frac{a_\alpha}{r_\alpha}x^\alpha$ יתכנס? אנו רוצים ש־r_α לא יהיה קטן מדי, במובן מסוים, כאשר $|\alpha|\to\infty$.

משפט 5.11 (סיגל, 1930): אם

$$|\lambda_i-(\alpha,\lambda)|>C\,|\alpha|^{-\mu}$$

כאשר $C,\mu>0$, כל שדה וקטורי אנליטי מהצורה $\dot{x}=Ax+h.o.t.$ ניתן ללינאריזציה אנליטית. קל להראות כי אם התנאי הנ"ל מתקיים עבור $|\alpha|>M$ כלשהו, הוא מתקיים לכל $|\alpha|$ (אולי עם C,μ אחרים).

משפט 5.12 (פואנקרה): אם $Re\lambda_i$ כולם בעלי אותו סימן, מספר היחסים הרזונטיביים סופי. בפרט, השדה הוקטורי שקול אנליטית לצורה נורמלית רזונטיבית פולינומיאלית.

נבחן את המקרה בו $\lambda_{1,2}=\pm i$. ראינו כי קיימת לינאריזציה חלקה, לפי משפט ברליצקי. אבל ראינו שבמקרה זה, הלינאריזציה יכולה להרוס אפילו את הטופולוגיה של תמונת הפאזה. כדי לבדוק אם קיימת לינאריזציה חלקה, נבדוק את היחסים הרזונטיביים. כך ניתן לקבל שאם $\lambda_i-(\alpha,\lambda)\neq 0$, אז $|\lambda_i-(\alpha,\lambda)|\geq 1$. **למרות זאת, לא נובע מכאן שניתן להגיע לצורה הנורמלית הרזונטיבית באופן חלק**. זה נובע מכך שיש מכשולים אחרים ללינאריזציה מלבד חלוקה ב־$\lambda_i-(\alpha,\lambda)$.

דוגמה: זו לא דוגמה של שדה וקטורי, אך היא מראה שיש מכשולים ללינאריזציה מלבד חלוקה במספרים קטנים. נביט במשוואה

$$f(x)-x^2f'(x)=x$$

נפתור בעזרת טור חזקות:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x$$

לכן

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6, ..., a_n = (n-1)!$$

והטור ודאי מתבדר.

$$f(x) = x + x^2 f'(x)$$

נקבל סדרת קירובים ל־f:

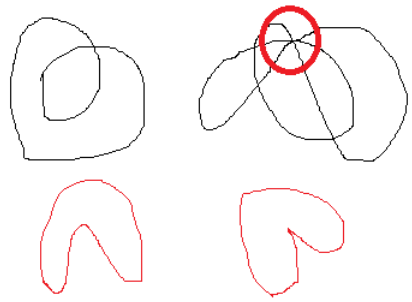
$$f(x) = x, f(x) = x + x^2, f(x) = x + x^2 + 2x^3 ...$$

לכן אין פתרון אנליטי למרות שאין חלוקה בגורמים קטנים. אבל כן קיים פתרון חלק. כלומר, במקרה הכללי, פתרונות פורמליים לא מבטיחים את קיומם של פתרונות אנליטיים, אפילו כאשר לא מחלקים בגורמים קטנים.

6 תורת ה־ADE[20]

נביט בעקומים שבציור הבא:

[20] הרצאה 19 - 28.12.2011



בשורה העליונה, יש הבדל בין העקומים השחורים: אם נזיז מעט את העקום השמאלי, עדיין נקבל אותו מספר של חיתוכים עצמיים. אך עבור העקום הימני, נוכל להזיז אותו מעט כך שבנקודה המוקפת באדום אחד נקבל 4 חיתוכים עצמיים במקום 3. בשורה התחתונה, לעקום האדום השמאלי אין שפיצים, אך לימני יש. היינו רוצים להגדיר במדויק את ההבדל בין העקומים הללו ־ להגדיר מתי עקום הוא גנרי. הבעיה היא שאין דרך טובה להגדיר גנריות עבור עקום אחד: למשל, אם עקום עובר דרך הנקודה $(5,8)$, ונזיז אותו מעט, הוא כבר לא יעבור דרך נקודה זו. אנו נגדיר גנריות עבור **משפחה** של אובייקטים, ולא עבור אובייקט יחיד.

אם נרצה לומר, למשל, שלעקום גנרי אין חיתוכים משולשים, נוכל להגיד שקבוצת העקומים שאין להם חיתוכים משולשים היא קבוצה פתוחה וצפופה ־ שינוי קטן לא ייתן לנו עקום עם חיתוך משולש, ולרוב העקומים אין חיתוך משולש. כמובן, עדיין נותר לנו להגיד באיזה מרחב טופולוגי קבוצה זו פתוחה וצפופה. לגבי מרחבים טופולוגיים ידועים, כבר נוכל לתת הצהרות מדויקות ־ למשל, מטריצות גנריות הן הפיכות, אך לא נכון להגיד שמטריצות גנריות הן סימטריות.

הגדרה 6.1 במרחב טופולוגי X, נאמר שאיבר **גנרי** ב־X מקיים תכונה כלשהי אם קבוצת הפונקציות המקיימות אותה פתוחה וצפופה.

עבור פונקציות רציפות בקטע סגור, לא ניתן לומר שפונקציה גנרית היא, למשל, בעלת פחות מ־2 שורשים. זו קבוצה פתוחה, אך היא לא צפופה ־ זה נובע ממשפט ערך הביניים. אנו גם לא יכולים להגיד שלפונקציה גנרית אין שורשים או שיש לה רק שורשים מבודדים. ניתן לראות שלא ניתן להגיד הרבה על שורשים של פונקציה רציפה גנרית, ולכן נצטרך לעבוד במרחב

גדול יותר מ־$C^0([a,b])$.

6.1 דוגמה ־ פונקציות C^1 גנריות

על המרחב $C^1([-1,1])$, נגדיר את הנורמה

$$\|f\|_{C_1} = \max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right)$$

טענה 6.2 בטופולוגיה המושרית מהנורמה $\|\cdot\|_{C_1}$, פונקציה גנרית ב־$C^1([-1,1])$ היא בעלת שורשים פשוטים בלבד.[21]

הוכחה: קבוצה פתוחה: נראה שהמשלים סגור. תהי $\{f_n\}$ סדרה מתכנסת לפונקציה f כך שלכל f_n קיים x_n כך ש־$f(x_n) = f'(x_n) = 0$. על־ידי מעבר לתת־סדרה, נוכל להניח ש־$x_n \to x_0$. נראה ש־$f(x_0) = f'(x_0) = 0$. אכן,

$$\|f(x_0)\| \le \|f(x_0) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0)\|$$

מרציפות f_n והתכנסות $f_n \to f$, נקבל ש־$\|f(x_0)\| = 0$, ובדומה עבור הנגזרת.

קבוצה צפופה: לבד. ■

שאלה: נביט על $C^1([-1,1]\times[-1,1])$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\|f\|_{C_1} = \max\left(\|f\|_\infty, \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_\infty, \left\|\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right\|_\infty\right)$. האם ניתן לומר שמשפחה חד־פרמטרית גנרית $f(\varepsilon, x)$ היא בעלת התכונה $f(\varepsilon_0, x_0) = 0 \Rightarrow f_x(\varepsilon_0, x_0) \neq 0$? התשובה היא שלא: נבחר $f(x) = x^2 + \varepsilon$ ואת הנקודה $(\varepsilon_0, x_0) = (0,0)$. ניתן להראות שגם יש לה סביבה של פונקציות בעלות שורש כזה. אך במרחב $C^2([-1,1]\times[-1,1])$ עם הנורמה המתאימה, הטענה הנ"ל נכונה.

6.2 נבטים (Germs)[22]

הגדרה 6.3 תהי $f \in \left\{ g : U \to \mathbb{R} \quad | \quad U \ open \right\}$. $x_0 \in (a,b)$ כך ש־f מוגדרת על (a,b). **הנבט** של f ב־x_0 הוא מחלקת השקילות של f ביחס השקילות $f \sim g$ אם קיימת

[21] הרצאה 20 - 1.1.2011
[22] הרצאה 21 - 4.1.2011

סביבה W של x_0 כך ש־$f\left(x\right)=g\left(x\right)$ לכל $x\in W$.

נוכל לנסח מחדש את משפט הפונקציות הסתומות:

משפט 6.4 יהי $F\left(x,y\right)$ נבט של פונקציה חלקה ב־$\left(x_0,y_0\right)$ כך ש־$F\left(x_0,y_0\right),F_y\left(x_0,y_0\right)\neq 0$. אז למשוואה $F\left(x,\varphi\left(x\right)\right)$ יש פתרון יחיד ביחס לנבט של פונקציה חלקה כלשהי ב־x_0.

כל תכונה לוקלית של פונקציה נשמרת בנבט שלה. למשל, התכונות $f\left(0\right)=1,f'\left(0\right)\neq 2$, קיום של מקסימום מקומי בנקודה, אנליטיות, f שטוחה וכו'. אך תכונות גלובלית, למשל, חיוביות בקטע או מקסימום גלובלי, לרוב לא נשמרות. נבטים מוגדרים באופן דומה לכל אובייקט אחר שנדון בו.

6.3 סילונים (Jets)

הגדרה 6.5 יהיו f,g נציגים של נבטים ב־x_0. נאמר ש־$f\sim g$ מדרגה k אם טורי טיילור של f,g עד מזדהים עד מעלה k. מחלקת השקילות של f נקראת ה־k־סילון של f ב־x_0.

למשל,

$$j_0^1e^x=j_0^1\left(1+x\right)=j_0^1\left(1+x+x^2\right)$$

$$j_0^2\sin x=j_0^2x\neq j_0^3\left(x-\frac{x^3}{6}\right)=j_0^3\sin x$$

הגדרה 6.6 תהי $f:U\to\mathbb{R}$ כאשר U פתוחה. j^kf היא העתקה $U\to J^k\left(\mathbb{R}\right)$, כאשר $J^k\left(\mathbb{R}\right)$ הוא מרחב ה־k־סילונים של פונקציות בנקודה כלשהי ב־$\mathbb{R}$, המוגדרת באופן הבא:

$$j^kf\left(x\right):\mathbb{R}\to J^k\left(\mathbb{R}\right)\simeq\mathbb{R}^{k+2}$$

$$x\mapsto\left(x,f\left(x\right),f'\left(x\right),...,f^{\left(k+1\right)}\left(x\right)\right)$$

ונקראת **הרחבת ה־k־סילון** של f. בדומה מגדירים את j^k עבור פונקציות של מספר משתנים.

דוגמה: הפעם, לפונקציה עם 2 משתנים:

$$j^1\left(x^3+x^2y\right):\mathbb{R}^2\to J^1\left(\mathbb{R}^2\right)$$

$$p=(a,b)\mapsto\left(a,b,a^3+a^2b,3a^2+2ab,a^2\right)$$

בפרט, $J^1\left(\mathbb{R}^2\right)\simeq\mathbb{R}^5$.

נגדיר את תת־הקבוצה הבאה של $J^0\left(\mathbb{R}\right)$:

$$J^0\left(\mathbb{R}\right)\supseteq S\triangleq\left\{\begin{array}{ll}(a,b): & b=0\end{array}\right\}\simeq\left\{\begin{array}{ll}(a,f(x)): & f(a)=0\end{array}\right\}$$

דוגמאות לאיברים ב־S:

$$\left(1,e^x-e\right),\left(0,e^x-1\right)\sim(0,0),\left(5,x^2-25\right)$$

6.4 טרנסוורסליות ומשפט טום

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. אז התמונה $j^0f\left(\mathbb{R}\right)$ היא עקום ־ ליתר דיוק, הגרף של f. נשים לב ש־$Im\left(j^0f\right)\cap S=\emptyset$ אם ורק אם ל־f אין שורשים. אנו רוצים למצוא ניסוח דומה שיגיד לנו מתי לפונקציה יש שורשים פשוטים בלבד. עבור פונקציה של משתנה אחד, זה שקול לכך שההעתקה j^0f **טרנסוורסלית** ל־S:

הגדרה 6.7 עבור $M=\mathbb{R}^n$, נגדיר יחס שקילות על עקומים חלקים

$$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$$

$$0 \mapsto m$$

נאמר ש־$\gamma_2 \sim \gamma_1$ אם $\|\gamma_1 (t) - \gamma_2 (t)\| = o(t)$. מרחב מחלקות השקילות הוא מרחב וקטורי ממימד n תחת הפעולות

$$\gamma_1 (t) + \gamma_2 (t) = m + (\gamma_1 (t) - m) + (\gamma_2 (t) - m)$$

$$r\gamma (t) = m + r (\gamma (t) - m)$$

ניתן לבדוק שהפעולות מוגדרות היטב. הוקטורים $\{e_i + m\}_{i=1}^n$, כאשר $\{e_i\}_{i=1}^n$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$, מהווים בסיס למרחב זה, ומסמנים אותם ב־$\frac{\partial}{\partial x_i}|_m$. מרחב זה נקרא **מרחב המשיקים** בנקודה m ומסומן ב־$T_m M$.[23]

הגדרה 6.8 יהיו M, N יריעות חלקות, $F : M \to N$ חלקה כך ש־$F(a) = b$. **הלינאריזציה** של F בנקודה a היא העתקה לינארית $F_{*,a}$ או $dF|_a$ מהמרחב המשיק של M ב־a למרחב המשיק של N ב־b,

$$dF (\gamma) = F \circ \gamma$$

לדוגמה,

$$M = \mathbb{R}^p \quad N = \mathbb{R}^q$$

$$m + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} F_1 (m_1 + t, m_2, ..., m_p) \\ \vdots \\ F_q (m_1 + t, m_2, ..., m_p) \end{pmatrix} =$$

[23] הרצאה 22 - 8.1.2011

$$\begin{pmatrix} F_1(m) \\ \vdots \\ F_q(m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(m) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial x_1}(m) \end{pmatrix} + o(t) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(m) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל בבסיסים הסטנדרטיים היא בדיוק מטריצת יעקובי בנקודה m.

הגדרה 6.9 תהי $F: M \to N$ ו־$C \subseteq N$ תת־יריעה. F **טרנסוורסלית** ל־C ב־$m \in M$ אם $F(m) \notin C$ או $F(m) \in C$ וגם

$$dF|_m(T_m M) + T_{F(m)}C = T_{F(m)}N$$

נאמר ש־F טרנסוורסלית ל־C אם F טרנסוורסלית ל־C בכל נקודה $m \in M$.

משפט 6.10 משפט הטרנסוורסליות של טום (Rene Thom, 1975): יהיו M, N יריעות חלקות, C תת־יריעה סגורה של $J^k(M,N)$. אז להעתקה חלקה גנרית[24] $F: M \to N$ יש הרחבת k־סילון טרנסוורסלית ל־C.[25]

כדי לדון בהעתקות גנריות, עלינו להגדיר טופולוגיה על מרחב ההעתקות החלקות $M \to N$. נציין כי המשמעות של גנריות בניסוח המשפט אינה בהכרח במובן שהגדרנו מקודם. אם C סגורה (ובמקרה נוסף שנדון בו בהמשך), המשמעות של גנריות היא שהקבוצה פתוחה וצפופה. אחרת, המשמעות היא שהקבוצה צפופה ו־G_δ, כלומר, חיתוך בן־מנייה של קבוצות פתוחות.

מה משמעות המשפט עבור $k=0$ ו־$C = \{U, \mathbb{R}\}$? j^0F פועלת על־ידי $x \mapsto (x, F(x))$. לכן טענת המשפט שקולה לכך ש־F טרנסוורסלית ל־U. במקרה זה ניתן לזהות את C עם U.

[24] ר' הערה בהמשך.
[25] הרצאה 23 - 11.1.2011

דוגמא: יהיו $M=\mathbb{R}, N=\mathbb{R}^2$ ו־C יהיה ציר Y. F טרנסוורסלית ל־C, לפי הגדרה, אם בכל נקודה $m\in\mathbb{R}$ כך ש־$F(m)\in C$,

$$dF|_m(T_mM)+T_{F(m)}C=T_{F(m)}N$$

$$dF|_m:T_m\mathbb{R}\to T_{F(m)}\mathbb{R}^2$$

הבסיס הסטנדרטי ב־$T_m\mathbb{R}$ הוא $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ וב־$T_{F(m)}\mathbb{R}^2$ הוא $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2}\right\}$. המטריצה המייצגת של $dF|_m$, כאשר $F=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$, תהיה $\begin{pmatrix}f_1'(m)\\f_2'(m)\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow Im(dF|_m)=span\begin{pmatrix}f_1'(m)\\f_2'(m)\end{pmatrix}\le T_{F(m)}\mathbb{R}^2$$

לכן כאן טרנסוורסליות משמעותה ש־$f_1'(m)\neq 0$ לכל נקודה כך ש־$F(m)\in C$. למשל, ההעתקה

$$F(x)=\begin{pmatrix}x^3\\x\end{pmatrix}$$

אינה טרנסוורסלית לציר Y. גם ההעתקה $\begin{pmatrix}x^3\\0\end{pmatrix}$ אינה טרנסוורסלית ל־C, למרות שתמונתה היא ציר X. ההעתקה $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, לעומת זאת, אכן טרנסוורסלית ל־C. אנו יכולים להגדיר טרנסוורסליות במונחים של יריעות, ולדון בטרנסוורסליות של תמונה של העתקה לתת־יריעה:

הגדרה 6.11 יהיו $A,B\subseteq N$ יריעות חלקות. נאמר ש־A **טרנסוורסלית** ל־B ב־N אם, בכל נקודה $m\in A\cap B$, $T_mA+T_mB=T_mN$.

הדוגמאות הנ"ל מראות שחשוב להבדיל בין טרנסוורסליות של העתקה ליריעה וטרנסוורסליות של **תמונה** של העתקה ליריעה. הראנו שטרנסוורסליות של תמונת העתקה (במובן שהגדרנו כרגע) לא גוררת טרנסוורסליות של ההעתקה עצמה, אך קל להראות שההפך נכון.

חשוב לזכור שטרנסוורסליות תלויה ביריעה בה משוכנות שתי היריעות שאנו בוחנים. למשל, ישרים מאונכים הם טרנסוורסליים ב־$\mathbb{R}^2$. ב־$\mathbb{R}^3$ הם מאונכים רק אם הם לא נחתכים ־ כדי ששתי יריעות נחתכות יהיו טרנסוורסליות ב־$\mathbb{R}^3$, יש לדרוש שלפחות אחת מהן היא מישור (אך זה לא מספיק, באופן כללי).

כעת ניקח את C להיות ישר כלשהו ו־M מעגל המשיק לו. אם נסיר מ־C את נקודת ההשקה, M ו־C טרנסוורסליים. אך ניתן להזיז מעט את המעגל, כך שקבוצת ההעתקות הטרנסוורסליות אינה פתוחה. אבל המשפט כן אומר שהיא תהיה חיתוך בן־מנייה של קבוצות פתוחות.

6.4.1 טופולוגיה על C^∞

עבור אוסף ההעתקות הגזירות ברציפות k פעמים $M \to N$, כאשר M קומפקטי, נוכל להגדיר טופולוגיה בעזרת הנורמה

$$\|F\| = \max_{x\in M, 1\leq i\leq k}\left\{\left|F^{(i)}\left(x\right)\right|\right\}$$

במקרה של פונקציות חלקות, לא נוכל להגדיר נורמה כזאת. אך נוכל להגדיר טופולוגיה בעזרת הבסיס הבא: לכל k, נקבע קבוצה פתוחה $U \subseteq J^k\left(M,N\right)$. קבוצת הבסיס המתאימה תהיה

$$W_{k,U} = \left\{\ F : M \to N \quad | \quad j^k F \in U\ \right\}$$

לא נגדיר את הטופולוגיה על J^k במדויק, אך ניתן מספר דוגמאות: למשל, את $J^0\left(M,N\right)$ נוכל לזהות עם $M \times N$. את $J^1\left(S^1,\mathbb{R}\right)$ נוכל לזהות עם $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (שתי הקואורדינטות האחרונות מייצגות את הערך של הפונקציה והנגזרת שלה). טופולוגיה זו נקראת **טופולוגית ויטני** (Whitney Topology).

עבור העתקות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, האם סדרת הפונקציות הקבועות $f_n\left(x\right) = \frac{1}{n}$ שואפת ל־0? התשובה היא שלא: באיור הבא ניתן לראות סביבה פתוחה שלה (כאשר מזהים את J^0 עם $\mathbb{R}^2$) שאף

פונקציה קבועה לא תוכל בה. בעצם, ניתן להראות כי אם $f_n \to 0$, אז התומך של כל הפונקציות בסדרה החל ממקום מסוים מוכל בקבוצה קומפקטית. אם מתחילים מקבוצה קומפקטית, המרחב מטריזבילי וניתן על־ידי מטריקת פרשה המתקבל מהסמי־נורמות $\left\|f^{(i)} - g^{(i)}\right\|_\infty$:[26]

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left\|f^{(i)} - g^{(i)}\right\|_\infty}{1 + \left\|f^{(i)} - g^{(i)}\right\|_\infty}$$

6.4.2 דוגמאות[27]

1. עבור $J^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ נביט בקבוצה $C \triangleq \left\{ \quad (x, f(x)) : \quad f(x) = 0 \quad \right\}$. אז $j^0 f$ טרנסוורסלי ל־C (נסמן $j^0 f \pitchfork C$)

$$\Longleftrightarrow \ (x \to (x, f(x))) \pitchfork C \ \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}, f'(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \pitchfork C \ \Longleftrightarrow \ (f(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \neq 0)$$

כלומר, בטופולוגיה שלנו, פונקציה גנרית אינה בעלת שורש כפול.

2. עבור $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, נביט בקבוצה $C \triangleq \left\{ \quad (x, f(x)) : \quad f(x) = 0 \quad \right\}$.

$$j^1 f \pitchfork C \ \Longleftrightarrow \ f'(x) \neq \ or \ f'(x) = 0 \ and$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}, f'(x)\frac{\partial}{\partial x}, f''(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \pitchfork C \ \Longleftrightarrow \ f'(x) \neq 0 \ or \ f''(x) \neq 0$$

כלומר, לפונקציה גנרית אין נקודות קיצון מנוונות.

3. כעת נבחן את המקרה של משפחה חד־פרמטרית. הפונקציות יהיו פונקציות של שני משתנים $f(\varepsilon, x)$, אך אנו נתייחס ל־ε בתור פרמטר ול־x בתור המשתנה. אז ב־$J^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, הוקטורים שלנו יהיו מהצורה $\{\varepsilon, x, f(\varepsilon, x)\}$. נגדיר $C \triangleq \{f(\varepsilon, x) = 0\}$.

$$j^1 f(\varepsilon, x) \pitchfork C \ \Longleftrightarrow \ f(\varepsilon, x) \neq 0 \ \forall \varepsilon, x \ or$$

[26] סמי־נורמה היא העתקה המקיימת את כל האקסיומות של נורמה מלבד $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$. קל לראות כי המטריקה המתקבלת אכן מקיימת את התנאי $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$.

[27] הרצאה 24 - 15.1.2011

$$((\varepsilon, x) \to (\varepsilon, x, f(\varepsilon, x))) \pitchfork C \iff$$

$$f(\varepsilon_0, x_0) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \to (0, 1, f_x(\varepsilon_0, x_0)) \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \to (1, 0, f_\varepsilon(\varepsilon_0, x_0)) \end{pmatrix} \pitchfork C \iff$$

$$f(\varepsilon_0, x_0) = 0 \Rightarrow f_x(\varepsilon_0, x_0) \neq 0 \ or \ f_\varepsilon(\varepsilon_0, x_0) \neq 0$$

לכן אם f ו־f_x מתאפסות בנקודה, אז f_ε אינה מתאפסת בנקודה זו. המשמעות היא שייתכן שבמשפחה חד־פרמטרית גנרית, תהיה פונקציה עם שורש מרובה, אך שינוי של הפרמטר (במקרה הגנרי) נותן פונקציה שאין לה שורש מרובה.

4. כעת נבחן את $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, שוב עבור המקרי החד־פרמטרי. הווקטורים שלנו יהיו מהצורה $\{\varepsilon, x, f(\varepsilon, x), f_x(\varepsilon, x), f_\varepsilon(\varepsilon, x)\}$. נגדיר $C \triangleq \{f(\varepsilon, x) = f_x(\varepsilon, x) = 0\}$.

$$j^1 f \pitchfork C \iff (f(\varepsilon, x) \neq 0 \ or \ f_x(\varepsilon, x) \neq 0 \ \forall (\varepsilon, x)) \ or$$

$$f(\varepsilon_0, x_0) = f_x(\varepsilon_0, x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \to \left(0, 1, \underbrace{f_x(\varepsilon_0, x_0)}_{=0}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varepsilon_0, x_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(\varepsilon_0, x_0)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \to \left(1, 0, f_\varepsilon(\varepsilon_0, x_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(\varepsilon_0, x_0), \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_0, x_0)\right) \end{pmatrix} \pitchfork C$$

$$\iff \left(f(\varepsilon_0, x_0) = f_x(\varepsilon_0, x_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0, x_0) \neq 0 \ and \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varepsilon_0, x_0) \neq 0\right)$$

5. כעת תהי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ללא פרמטרים) כאשר $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. הווקטורים יהיו מהצורה $\{x_1, x_2, f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}$. נגדיר $y_i \triangleq f_i(x_1, x_2)$, ובנוסף $C \triangleq$

$\{y_1 = y_2 = 0\}$.כמו מקודם, $F(x_1, x_2) \neq 0 \iff j^1 f \pitchfork C$ או לפי הדיפרנציאל:

$$d\left(j^0 F\right)|_{x_{10}, x_{20}} : \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1} \to \left(1, 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \to \left(0, 1, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \end{array}$$

כלומר, היעקוביאן שונה מאפס.