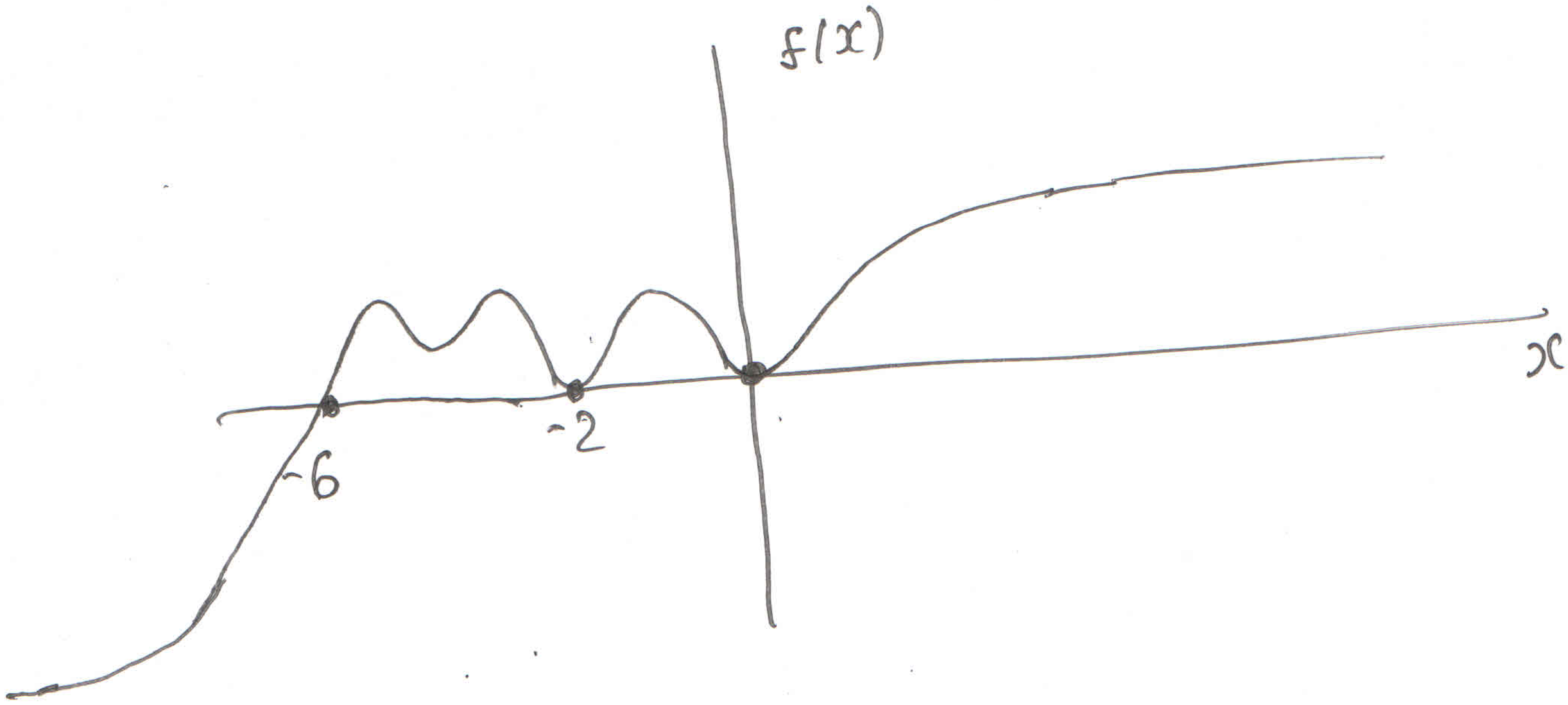
בעיה 1. רק התשובה הסופית תיבדק

תנו דוגמא לגרף של פונקציה $f(x) \in C^1(\mathbf{R})$ (ללא נוסחה) כך שהתנאים הבאים מתקיימים לכל פתרון $x(t)$ של המשוואה $x' = f(x)$ עם תנאי ההתחלה $x(0) = a$ המוגדר בקטע המקסימלי האפשרי (t^-, t^+):

- $t^+ = \infty$ ו־ $t^- = -\infty$ לכל $a \in \mathbf{R}$
- $lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ אם ורק אם $a \in (-2, 0]$
- $lim_{t\to\infty} x(t) = -2$ אם ורק אם $a \in (-6, -2]$
- לכל $a \in (-6, -2)$ בגרף של $x(t)$ יש בדיוק 3 נקודות פיתול.

One of examples:



בעיה 2

תנו הוכחה מדוייקת לכך שלמשוואה

$$x' = \frac{x(x^4+1)(1-t)}{x^4+2}$$

יש פתרון $x(t)$ המקיים את התנאי ההתחלה $x(0)=-1$
ומוגדר לכל $t \in \mathbf{R}$. ציירו את גרף של הפתרון.

Let (t^-, t^+) be max interval for the solution. Since the equation has constant solution $x(t) \equiv 0$, the uniqueness thm implies

$(*)$ $x(t) < 0, \quad t \in (t^-, t^+)$.

From the equation and $(*)$ we see that

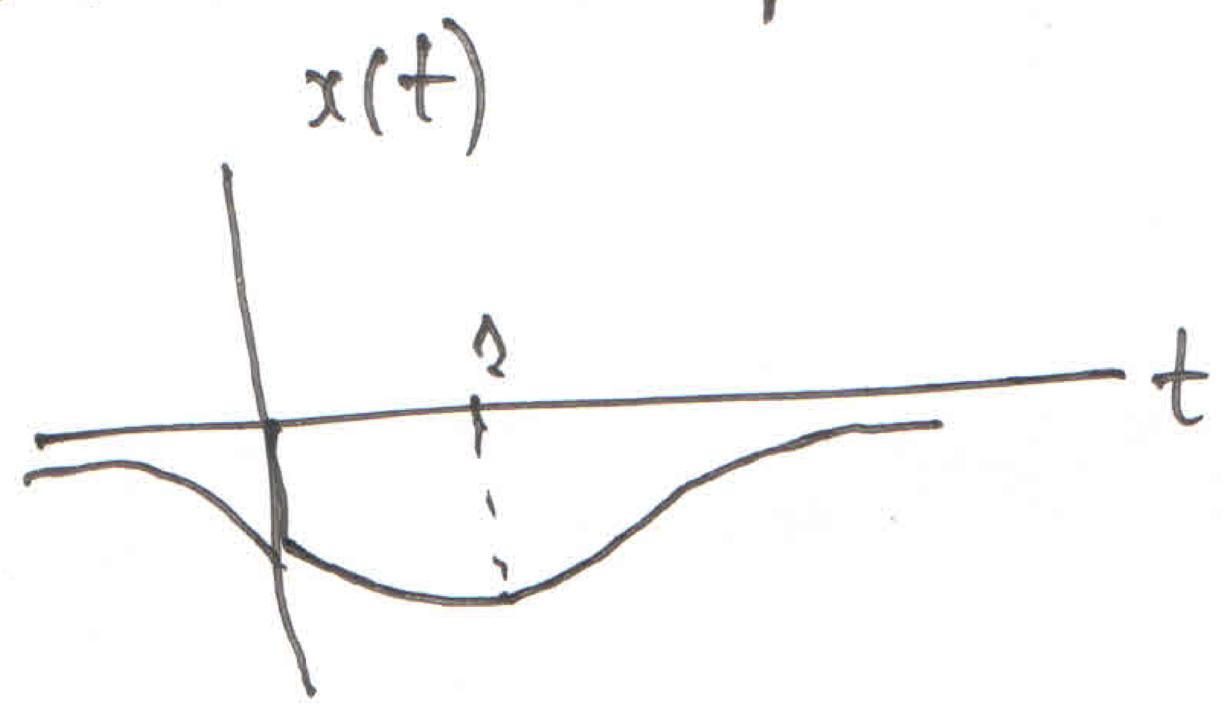
$(**)$ $x(t) \downarrow$ as $t \in (t^-, t^+)$ and $t < 1$

$x(t) \uparrow$ as $t \in (t^-, t^+)$ and $t > 1$

By $(*)$ and $(**)$ $\exists \lim_{t \to t^-} x(t) \le 1$. By thm on prolongation of solutions $t^- = -\infty$. If $t^+ > 1$ then the same argument as for t^- implies $t^+ = \infty$. But a priori we do not know that $t^+ > 1$. The proof that $t^+ = \infty$ is different. Assume (to get contradiction) $t^+ < 1$. Then, by $(**)$ and the theorem on prolongation of solutions, one has $\lim_{t \to t^-} x(t) = -\infty$. We have

$(***)$ $\displaystyle\int_{-1}^{x(t)} \frac{(s^4+2)\,ds}{s(s^4+1)} = \int_0^t (1-s)\,ds \Rightarrow \underbrace{\int_{-1}^{-\infty} \frac{x^4+2}{x(x^4+1)}\,dx}_{=\infty} = \int_0^{t^+} (1-t)\,dt < \infty$:

contradiction. Therefore $t^+ = \infty$. Simple analysis of $(***)$ implies $\lim_{t \to t^\pm} x(t) = 0$:



בעיה 3. רק התשובה הסופית תיבדק

בציור 1 נתון גרף של אחד הפתרונות של המשוואה

$$x'' = f(x) \in C^1(\mathbf{R}), \;\; x = x(t)$$

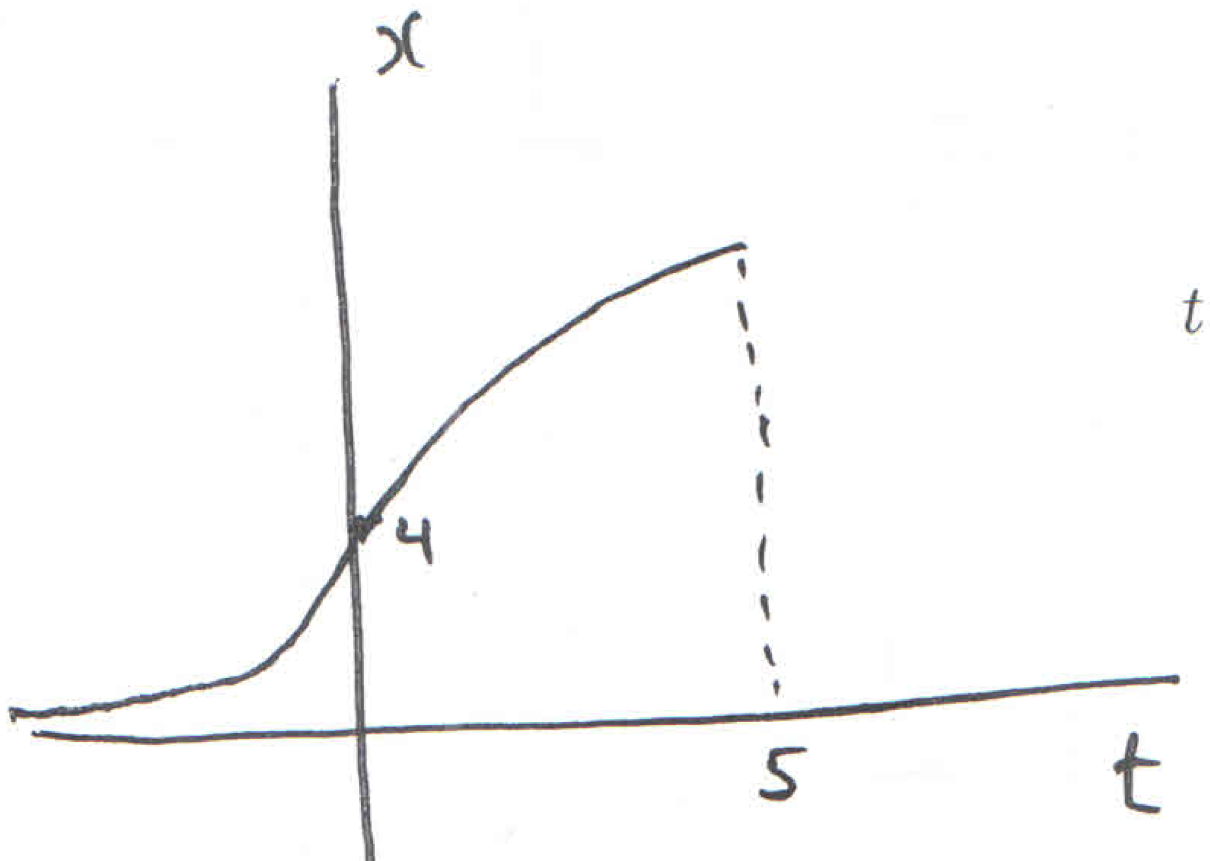
המוגדר עבור $t \in (-\infty, 5)$ ומקיים את התנאים

$$x(0) = 4, \;\; x'(0) = 1, \;\; \lim_{t \to 5} x'(t) = 0.$$

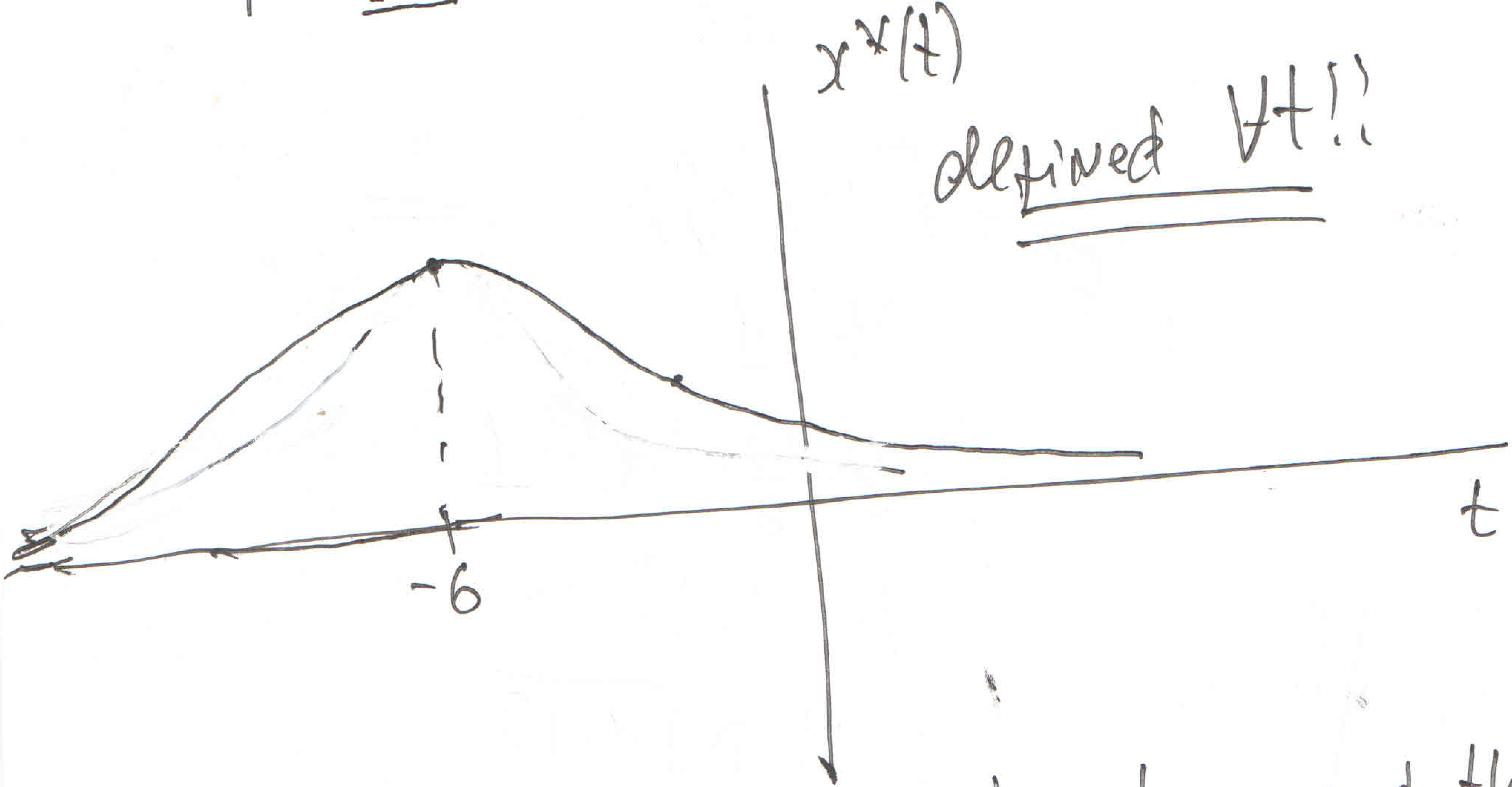
לאותה המשוואת קיים פתרון $x^*(t)$ המוגדר לכל $t \in \mathbf{R}$ ומקיים את התנאים

$$x^*(-1) = 4, \;\; (x^*)'(-1) = -1$$

ציירו את הגרף של $x^*(t)$.



ציור 1



defined ∀t!!

By the lemma on shift of time and the inverse of time + lemma on the symmetries about ~~the~~ point at which the derivative is equal to 0.

בעיה 4. הדרך של פתרון תיבדק

יהי $x(t)$ פתרון של המשוואה

$$x''(t) = -sin\,(x(t))$$

המוגדר לכל $t \in \mathbf{R}$ ומקיים את התנאי ההתחלה

$$x(0) = -\frac{\pi}{3}, \quad x'(0) = v_0 > 0$$

א. תנו תנאי הכרחי ומספיק על $v_0 > 0$ כך שיהיה קיים $t_1 > 0$ שעבורו $x(t_1) = \frac{3\pi}{4}$

אינטגרלים והביטויים $arcsin,\ arccos, sin^{-1},\ cos^{-1}$ אסורים בתשובה הסופית

ב. יהי $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. מצאו $t_1 > 0$ כך ש- $x'(t_1) < 0$, $x(t_1) = -\frac{\pi}{3}$,

הביטויים $\int sinx,\ \int cosx,\ $ ~~arcsin, arccos, sin⁻¹, cos⁻¹~~ אסורים בתשובה הסופית, אינטגרלים אחרים מותרים.

$$\frac{(x')^2}{2} - \cos x = \frac{v_0^2}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{v_0^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x'(t))^2 - 2\cos(x(t)) = v_0^2 - 1}$$ :: energy equation.

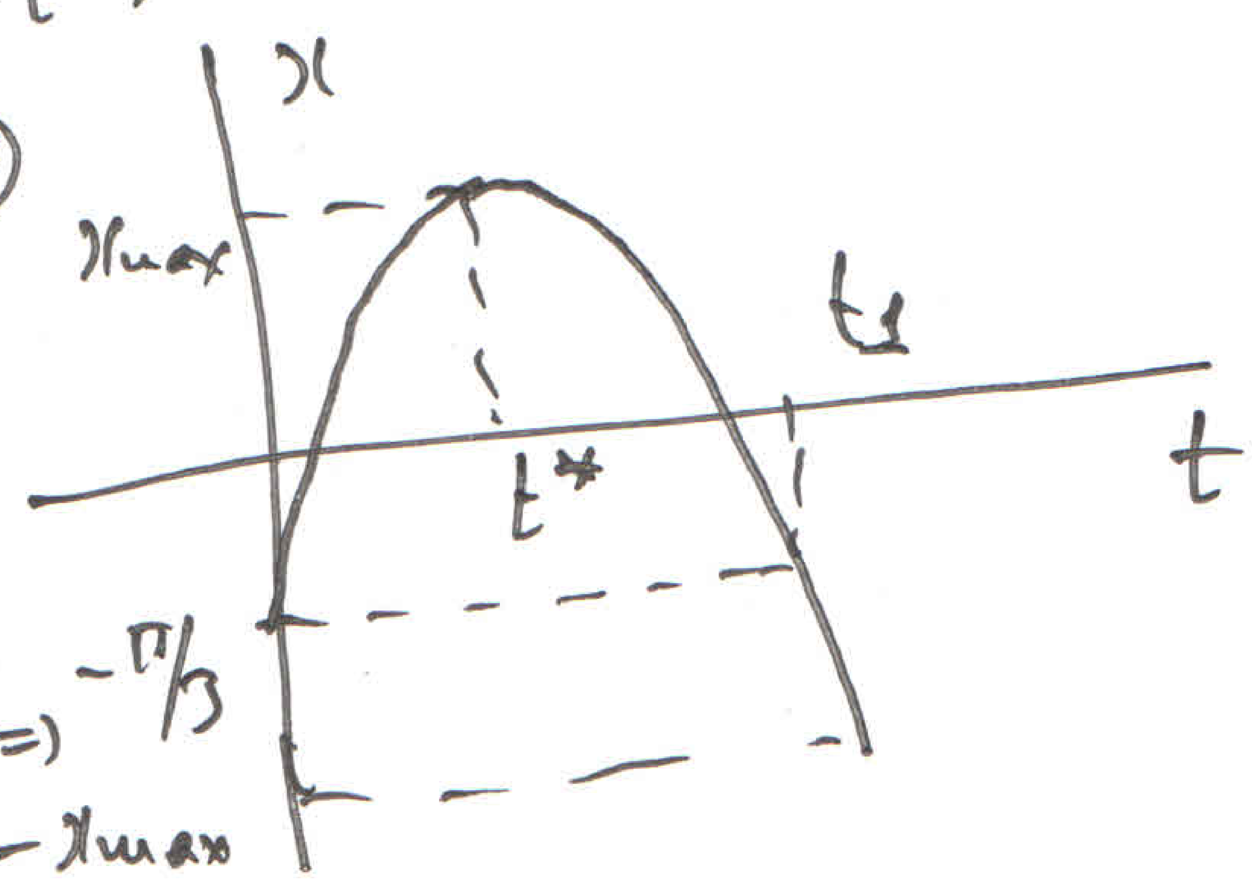
א. t_1 exists $\Leftrightarrow v_0^2 - 1 + 2\cos(x(t_1)) \geq 0$

$v_0^2 - 1 + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \geq 0 :: v_0 \geq \sqrt{1+2\sqrt{2}}.$

ב. Find $v_{0,crit}$: For $v_{0,crit}$: $x(t) \to \pi,\ x'(t) \to 0$ as $t \to \infty$.

Therefore $v_{0,crit}^2 - 1 = -2\cos(\pi) = 2 \Rightarrow v_{0crit} = \sqrt{3}$.

The given $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} < v_{0crit} \Rightarrow$



By the lemma on symmetries $t_1 = 2t^*$. The energy equation with $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $(x'(t))^2 - 2\cos(x(t)) = -1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x'(t) = \sqrt{2\cos x(t) - \frac{1}{2}}$ as $t \in [0, t^*] \Rightarrow$ x_{max} satisfies:

$-2\cos(x_{max}) = -1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{max} = \arccos(1/4).$

$$\Rightarrow t_1 = 2 \cdot \int_{-\pi/3}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2\cos x(t) - \frac{1}{2}}}$$

בעיה 5. הדרך של פתרון תיבדק

מצאו נוסחה עבור $f(t)$ כך שהפונקציה $x(t) = f(t)$ היא פתרון של המשוואה Bernoulli

$$x' = x + \sqrt{t^2+1} \cdot x^2$$

עם התנאי ההתחלה $x(3) = 5$.

אינטגרל $\int t dt$ אסור בתשובה הסופית, אינטגרלים אחרים מותרים.

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}\left(x + \sqrt{t^2+1} \cdot x^2\right) = -y - \sqrt{t^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = ce^{-t} + C(t)e^{-t}, \text{ where}$$

$$C(t): \quad C'(t)e^{-t} = -\sqrt{t^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t) = -e^{t}\sqrt{t^2+1} \Rightarrow C(t) = -\int_3^t e^{t}\sqrt{s^2+1}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = ce^{-t} - e^{-t}\int_3^t e^{s}\sqrt{s^2+1}\,ds.$$

$$y(3) = \frac{1}{x(3)} = \frac{1}{5} = ce^{-3} \Rightarrow c = \frac{e^3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{e^{3-t}}{5} - e^{-t}\int_3^t e^{s}\sqrt{s^2+1}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{t}\left(\frac{1}{\frac{e^3}{5} - \int_3^t e^{s}\sqrt{s^2+1}\,ds}\right).$$

בעיה 6. הדרך של פתרון תיבדק

תהי $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & a \end{pmatrix}$. מצאו $a \in \mathbf{R}$ כך שכל פתרון לא קבוע של המערכת $x' = Ax, \ x = (x_1(t), x_2(t))$ הוא פונקציה מחזורית.

עבור a שמצאתם מצאו מספרים ממשיים r_1, r_2, r_3 כך ש־

$$r_1 x_1^2(t) + r_2 x_1(t) x_2(t) + r_3 x_2^2(t) \equiv const$$

לכל פתרון של המערכת.

בתוצאות הסופיות צריכים להופיע רק מספרים ממשיים.

The eigenvalues must be $\pm\beta i \Rightarrow$ trace $= 0 \Rightarrow \underline{a = -3}$.

For $a = -3$ the eigenvalues are $\pm i$.

$A - iI = \begin{pmatrix} 3-i & -1 \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow$ eigenvectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 3-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3+i \end{pmatrix}$.

let $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix}$, $x = Tz$. Then $z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} z \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 z_2 = const$. To express z_1, z_2 in terms of x_1, x_2

find $T^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3+i & -1 \\ -3+i & 1 \end{pmatrix}}{2i} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2i}\left((3+i)x_1 - x_2\right), \quad z_2 = \frac{1}{2i}\left((-3+i)x_1 + x_2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 z_2 = -\frac{1}{4}\left(-10x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{10x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = const.}$

בעיה 7. הדרך של פתרון תיבדק

יהי

$$P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^2+a\lambda+b)$$

מצאו $a,b\in\mathbf{R}$ כך שלמשוואה

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t)) = cos\,(2t)+e^{-t}$$

יש פתרון לא הסום $x(t)$ עבור $t\to\infty$

(כלומר, לכל $C\in\mathbf{R}$ קיים $t_1>0$ כך ש- $|x(t_1)|>C$).

עבור a,b שמצאתם, תנו נוסחה לקבוצת כל הפתרונות של משוואה.

בתוצאות הסופיות צריכים להופיע רק מספרים ממשיים.

There are ~~so~~ many couples a, b satisfying the given requirement:

1) a, b are such that one of the roots of $\lambda^2+a\lambda+b$ has ~~negative~~ positive real part

2) $a=0$, $b=4$.

One can take any (a,b) satisfying either 1) or 2) and make direct computation using complex numbers and the formulas from the theory. No need to use variation of parameters.