אלגברה 104009, גליון מס' 3

מערכות של משוואות לינאריות: חלק 1

יש לפתור את שאלות 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 4.4, 5.2, 5.4, 5.6, 5.8 (הבעיות האחרות: לתרגול).

שאלה 1

כתבו את מערכות המשוואות הבאות בצורה $Ax = b$, כאשר A היא מטריצה ו-b הוא וקטור:

1.1. $x_2 - x_3 = 1,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_2 - x_4 = 0$.

1.2. $x_2 + x_3 = 0,\ x_3 - x_1 = 0,\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,\ x_2 + 4x_3 = 2$.

שאלה 2

יהיו

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & 2 & 0 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.1. מצאו את $C \cdot (B \cdot (Ax))$.

2.2. מצאו את $B \cdot (C \cdot (Ax))$.

שאלה 3

3.1. תהא A מטריצה 3×3 כך ש-$A_{ij} = 0$ אם $i \geq j$ ויהי $x \in \mathbb{R}^3$. מה תוכלו לומר על הוקטור $A \cdot x$? על הוקטור $A \cdot (Ax)$? על הוקטור $A \cdot (A \cdot (Ax))$?

3.2. תהא A מטריצה 4×4 כך ש-$A_{ij} = 0$ אם $i \leq j$. הוכיחו כי $A \cdot (A \cdot (A \cdot (Ax))) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^4$.

שאלה 4

דרגו את המטריצות הבאות (עם פרמטר $a \in \mathbb{R}$) ומצאו את דרגתן. הדרגה עשויה להיות תלויה ב-a.

$$4.1.\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ a & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\quad 4.2.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}\quad 4.3.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 4 & 2 & a \end{pmatrix}\quad 4.4.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

לאילו $a,b\in\mathbb{R}$ הדרגה של המטריצות הבאות שווה (א) ל-1, (ב) ל-2, (ג) ל-3?

$$5.1.\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & a & b \end{pmatrix}\quad 5.2.\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & b & 3 \end{pmatrix}\quad 5.3.\ \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.4.\ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad 5.5.\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\quad 5.6.\ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.7.\ \begin{pmatrix} a^2-1 & 1 & 0 & 2 \\ a^2-2 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad 5.8.\ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & 2b+1 \end{pmatrix}$$